数値解析と複素関数論・佐藤超函数論
Fourier 変換の数値計算を通して

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 5 月 22 日（土）

はじめに

今回のテーマ

数値解析と
複素関数論・佐藤超函数論（複素関数論に基づく一般化関数の理論）．

複素解析関数（正則関数）とは？

- 複素関数として微分可能（Cauchy-Riemann の関係式）．
- 実用上現れる関数は解析関数が多い
  （多項式，三角関数，指数関数，特殊関数，…）．
- 遠く離れた 2 点での値が密接に結びついている．
  - Cauchy の積分定理
  - 留数定理（→実積分の計算への応用）．

数値解析における複素解析関数の意義を
Fourier 変換の数値計算を通して考えてみたい．

今回の内容

1. Fourier 変換：数値計算の難しさ
2. Fourier 変換の数値計算
3. 数値例
4. Fourier 変換計算と複素関数論
5. Fourier 変換計算と佐藤超函数論
6. まとめ

(1/6) Fourier 変換：数値計算の難しさ

関数 $f(x)$ の Fourier 変換

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-2\pi \mathrm{i} \xi x) \mathrm{d}x.$$

- 科学技術研究で重要である（振動波動現象 etc.）.
- 減衰の遅い関数 $f(x)$ に対しては,
  従来の数値積分法では計算が難しい.

(1/6) Fourier 変換：数値計算の難しさ

DE 公式による減衰の遅い関数の全無限区間積分の数値計算例.

$$(1)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi (= 3.14159\,26535\,89793\ldots).$$

標本点数	計算値	誤差
13	$\underline{3.141}68\,64575\,30666$	3×10^{-5}
21	$\underline{3.14159\,2}5866\,30724$	2×10^{-8}
39	$\underline{3.14159\,26535\,8979}4$	3×10^{-16}

DE 公式による減衰の遅い関数の全無限区間積分の数値計算例.
振動積分（Fourier 変換）の場合.

$$(2)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\pi x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \pi \mathrm{e}^{-2\pi} (= 1.15572\,73497\,90922\ldots).$$

h	標本点数 $N_+ + N_- + 1$	計算値	誤差
1	13	1.58125 37966 15643	4×10^{-1}
2^{-1}	21	1.34196 68485 53180	2×10^{-1}
2^{-2}	39	1.11369 34847 54938	4×10^{-2}
2^{-3}	73	1.26481 85622 97596	9×10^{-2}
2^{-4}	143	1.17117 00197 53101	1×10^{-2}

振動積分は一向に収束しない.

どうすれば Fourier 変換を計算できるだろうか？

Fourier 変換を次のように書き直す：

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \lim_{\epsilon \to +0} \left\{ \int_{-\infty}^{0} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(\xi + \mathrm{i}\epsilon)x} \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(\xi - \mathrm{i}\epsilon)x} \mathrm{d}x \right\}$$

右辺の積分：指数関数的減衰する因子 $\exp(-2\pi\epsilon|x|)$ を含む.

(2/6) Fourier 変換の数値計算

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \lim_{\epsilon\to+0} \{\mathfrak{F}_+[f](\xi+\mathrm{i}\epsilon) - \mathfrak{F}_-[f](\xi-\mathrm{i}\epsilon)\},$$

$$\mathfrak{F}_\pm[f](\zeta) = \pm\int_0^\infty f(\mp x)\mathrm{e}^{\pm 2\pi\mathrm{i}\zeta x}\mathrm{d}x \quad (\pm\,\mathrm{Im}\,\zeta > 0).$$

- $\mathfrak{F}_\pm[f](\zeta)$ は上／下半平面 $\pm\,\mathrm{Im}\,\zeta > 0$ における解析関数である．
- $\mathfrak{F}_\pm[f](\zeta)$ の被積分関数は指数関数的減衰する因子 $\exp(-2\pi|\,\mathrm{Im}\,\zeta|x)$ を含むので，従来の数値積分公式で計算できる．

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \lim_{\epsilon \to +0} \{\mathfrak{F}_+[f](\xi + \mathrm{i}\epsilon) - \mathfrak{F}_-[f](\xi - \mathrm{i}\epsilon)\},$$

$$\mathfrak{F}_\pm[f](\zeta) = \pm \int_0^\infty f(\mp x) \mathrm{e}^{\pm 2\pi \mathrm{i}\zeta x} \mathrm{d}x \quad (\pm \operatorname{Im}\zeta > 0).$$

- $\mathfrak{F}_\pm[f](\zeta)$ は上／下半平面 $\pm \operatorname{Im}\zeta > 0$ における解析関数である．
- $\mathfrak{F}_\pm[f](\zeta)$ の被積分関数は指数関数的減衰する因子 $\exp(-2\pi|\operatorname{Im}\zeta|x)$ を含むので，従来の数値積分公式で計算できる．

Fourier 変換の数値計算法

1. 上／下半平面 $\pm \operatorname{Im}\zeta > 0$ で解析関数 $\mathfrak{F}_\pm[f](\zeta)$ を従来の数値積分公式で計算する．
2. 解析関数 $\mathfrak{F}_\pm[f](\zeta)$ を実軸上に解析接続する（定義域を広げる）．
3. Fourier 変換 $\mathscr{F}[f](\xi) = \mathfrak{F}_+[f](\xi) - \mathfrak{F}_-[f](\xi)$ を得る．

Fourier 変換の数値計算法

1. 上／下半平面 $\pm \operatorname{Im}\zeta > 0$ で解析関数 $\mathfrak{F}_\pm[f](\zeta)$ を計算する．

$$\mathfrak{F}_\pm[f](\zeta) = \pm \int_0^\infty f(\mp x) \mathrm{e}^{\pm 2\pi \mathrm{i} \zeta x} \mathrm{d}x \quad (\, \pm \operatorname{Im}\zeta > 0 \,).$$

上／下半平面 $\pm \operatorname{Im}\zeta > 0$ に点 $\zeta_0^{(\pm)}$ を適当に取り，
$\zeta_0^{(\pm)}$ における $\mathfrak{F}_\pm(\zeta)$ の Taylor 級数を求める．

$$\mathfrak{F}_\pm[f](\zeta) = \sum_{n=0}^\infty c_n^{(\pm)} (\zeta - \zeta_0^{(\pm)})^n,$$

$$c_n^{(\pm)} = \pm \frac{1}{n!} \int_0^\infty (\pm 2\pi \mathrm{i} x)^n f(\mp x) \mathrm{e}^{\pm 2\pi \mathrm{i} \zeta_0^{(\pm)} x} \mathrm{d}x \quad (\, n = 0, 1, 2, \ldots \,).$$

被積分関数は指数関数的減衰する因子 $\exp(-2\pi |\operatorname{Im}\zeta_0^{(\pm)}| x)$ を含むので，
従来の数値積分公式で計算できる．

(2/6) Fourier 変換の数値計算

Fourier 変換の数値計算法

2. 解析関数 $\mathfrak{F}_{\pm}[f](\zeta)$ を実軸上に解析接続する（定義域を広げる）.
3. Fourier 変換 $\mathscr{F}[f](\xi) = \mathfrak{F}_{+}[f](\xi) - \mathfrak{F}_{-}[f](\xi)$ を得る.

前項で求めた Taylor 級数を連分数に変換して解析接続を行う

$$\mathfrak{F}_{\pm}[f](\zeta) = \cfrac{a_0^{(\pm)}}{1 + \cfrac{a_1^{(\pm)}(\zeta - \zeta_0^{(\pm)})}{1 + \cfrac{a_2^{(\pm)}(\zeta - \zeta_0^{(\pm)})}{1 + \ddots}}}.$$

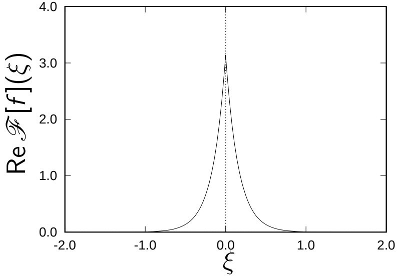
- 一般に連分数関数は Taylor 級数より収束域が広い.
- Taylor 級数→連分数：「商差法」を用いる.

(3/6) 数値例

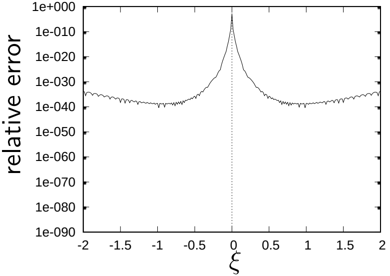
$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \mathscr{F}[(1+x^2)^{-1}](\xi) = \pi \mathrm{e}^{-2\pi|\xi|}, \\
&(2) \quad \mathscr{F}[\tanh(\pi x)](\xi) = -\mathrm{i}\,\mathrm{cosech}(\pi\xi), \\
&(3) \quad \mathscr{F}[\log|x|](\xi) = -\gamma\delta(\xi) - \frac{1}{2|\xi|}.
\end{aligned}
$$

- 本研究の方法で Fourier 変換 $\mathscr{F}[f](\xi)$ を計算し，誤差を調べた．
- 多倍長演算（10 進 100 桁）．
- $\mathfrak{F}_{\pm}[f](\zeta)$ の Taylor 係数：DE 公式で計算．
- 次の論文から結果を引用．
  H. Ogata: Numerical calculation of Fourier transforms based on hyperfunction theory, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **378** (2020) 112921, DOI: 10.1016/j.cam.2020.112921

(3/6) 数値例

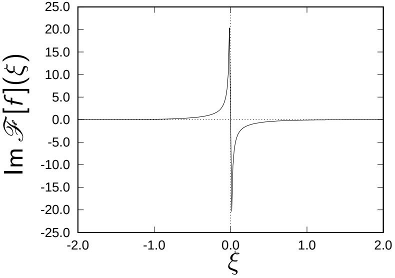


Re $\mathscr{F}[f](\xi)$

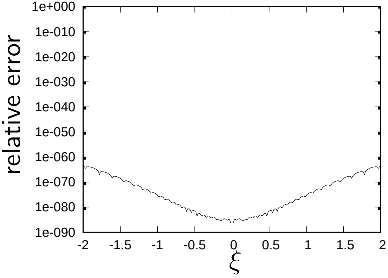


relative error

$$(1)\ f(x) = (1+x^2)^{-1},\ \mathscr{F}[f](\xi) = \pi \mathrm{e}^{-2\pi|\xi|}.$$



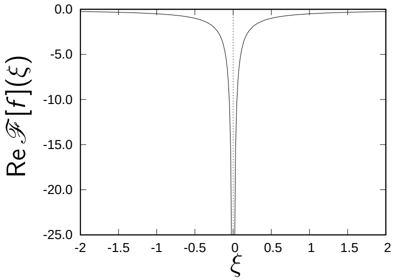
$\mathrm{Im}\,\mathscr{F}[f](\xi)$



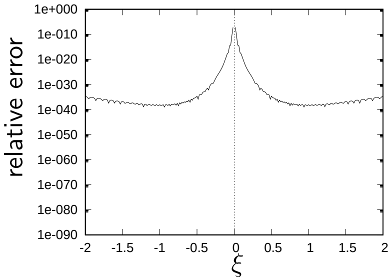
relative error

(2) $f(x) = \tanh(\pi x)$, $\mathscr{F}[f](\xi) = -\mathrm{i}\,\mathrm{cosech}(\pi\xi)$.

(3/6) 数値例



Re $\mathscr{F}[f](\xi)$



relative error

$$(3)\ \ f(x) = \log|x|,\ \mathscr{F}[f](\xi) = -\gamma\delta(\xi) - \frac{1}{2|\xi|}.$$

以上の数値例から，本方法の有効性が示された．

(3/6) 数値例（比較実験）

- 既存の方法との比較.
  - （杉原）Richardson 補外& DE 公式.
  - （大浦・森）振動積分に特化した DE 公式.
- $\mathscr{F}[f](\xi = 1)$ を計算した.
- ϵ : 相対誤差, N : 関数 $f(x)$ の計算回数.

(3/6) 数値例（比較実験）

- 既存の方法との比較.
  - （杉原）Richardson 補外& DE 公式.
  - （大浦・森）振動積分に特化した DE 公式.
- $\mathscr{F}[f](\xi = 1)$ を計算した.
- ϵ : 相対誤差, N : 関数 $f(x)$ の計算回数.

$f(x)$		(1) $(1+x^2)^{-1}$	(2) $\tanh(\pi x)$	(3) $\log\lvert x\rvert$
本方法	ϵ	3×10^{-39}	5×10^{-76}	9×10^{-39}
	N	1242	1202	1252
杉原	ϵ	1.4×10^{-19}	9×10^{-20}	4×10^{-20}
	N	27072	53114	35280
大浦・森	ϵ	7×10^{-63}	5×10^{-57}	1×10^{-69}
	N	1690	1618	1698

既存の方法と比べて，本方法は有効であることがわかる.

(4/6) Fourier 変換計算と複素関数論

Fourier 変換の数値計算法の話を整理する.

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}x = \mathfrak{F}_{+}[f](\xi+\mathrm{i}0) - \mathfrak{F}_{-}[f](\xi-\mathrm{i}0),$$

$$\mathfrak{F}_{\pm}[f](\zeta) = \pm\int_{0}^{\infty} f(\mp x)\mathrm{e}^{\pm 2\pi\mathrm{i}\zeta x}\mathrm{d}x \quad (\,\pm\,\mathrm{Im}\,\zeta > 0\,).$$

1. 実軸上の実関数 $\mathscr{F}[f](\xi)$ よりも 複素平面上の複素関数 $\mathfrak{F}_{\pm}[f](\zeta)$ の方が計算しやすい.
2. 前項の複素関数 $\mathfrak{F}_{\pm}[f](\zeta)$ を実軸上に解析接続して，Fourier 変換 $\mathscr{F}[f](\xi)$ を求める.
3. これが可能なのは，$\mathfrak{F}_{\pm}[f](\zeta)$ が複素解析関数であるからである.

(4/6) Fourier 変換計算と複素関数論

$\mathfrak{F}_{\pm}[f](\zeta)$ は上／下半平面 $\pm \operatorname{Im} \zeta > 0$ での解析関数である．
ところで，複素解析関数（正則関数）とは何だったか？

- 複素関数として微分可能（Cauchy-Riemann の関係式）．
- 実用上現れる関数は解析関数が多い
  （多項式，三角関数，指数関数，特殊関数，$\cdots$）．
- 遠く離れた 2 点での値が密接に結びついている．
  - Cauchy の積分定理

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0 \quad (\, C \ : \ \text{閉積分路}\,).$$

  - 留数定理（→実積分の計算への応用）．

この性質を Fourier 変換の数値計算に利用した．

(4/6) Fourier 変換計算と複素関数論

Fourier 変換計算の話に戻ると，

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \mathfrak{F}_{+}[f](\xi + \mathrm{i}0) - \mathfrak{F}_{-}[f](\xi - \mathrm{i}0).$$

- $\mathfrak{F}_{\pm}[f](\zeta)$：上／下半平面 $\pm \operatorname{Im} \zeta > 0$ における複素解析関数．
- $\mathfrak{F}_{\pm}[f](\zeta)$：実軸上よりも複素平面上の方が計算しやすい．
- 複素平面上の値から，実軸上の値 $\mathfrak{F}_{\pm}[f](\xi \pm \mathrm{i}0)$ を読み取った．

(4/6) Fourier 変換計算と複素関数論

Fourier 変換計算の話に戻ると,

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \mathfrak{F}_+[f](\xi + \mathrm{i}0) - \mathfrak{F}_-[f](\xi - \mathrm{i}0).$$

- $\mathfrak{F}_\pm[f](\zeta)$：上／下半平面 $\pm \operatorname{Im} \zeta > 0$ における複素解析関数.
- $\mathfrak{F}_\pm[f](\zeta)$：実軸上よりも複素平面上の方が計算しやすい.
- 複素平面上の値から，実軸上の値 $\mathfrak{F}_\pm[f](\xi \pm \mathrm{i}0)$ を読み取った.

Fourier 変換計算における解析関数の意義

- 遠く離れた 2 点での値が密接に結びついている.
- 複素平面上の計算しやすい所で計算して,
  実軸上での値を見積もる（解析接続）.

(5/6) Fourier 変換計算と佐藤超函数論

佐藤超函数論

- 佐藤幹夫，1958 年.
- 複素関数論に基づく一般化関数論.
- 超函数 (hyperfunction) とよばれる一般化関数 $f(x)$ は
  ある複素解析関数 $F(z)$ の実軸 $\mathbb{R}$ 上の境界値の差で表される.

$$f(x) = [F(z)] := F(x + \mathrm{i}0) - F(x - \mathrm{i}0).$$

$F(z)$: 超函数 $f(x)$ の定義関数.

∗ 超函数には Schwartz による流儀もある (distribution).

超函数の例

- Dirac のデルタ関数 $\delta(x)$.

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & (\, x = 0 \,) \\ 0 & (\, x \neq 0 \,), \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x = f(a).$$

$$\delta(x) = \left[\frac{-1}{2\pi \mathrm{i} z}\right] = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x+\mathrm{i}0} - \frac{1}{x-\mathrm{i}0}\right).$$

- Heaviside のステップ関数 $Y(x)$.

$$Y(x) = \begin{cases} 1 & (\, x > 0 \,) \\ 0 & (\, x < 0 \,). \end{cases}$$

$$Y(x) = \left[-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \log(-z)\right].$$

$*$ 複素対数関数 $\log z$ は主値（$\log x \in \mathbb{R}$ $(x > 0)$ なる分枝）をとる.

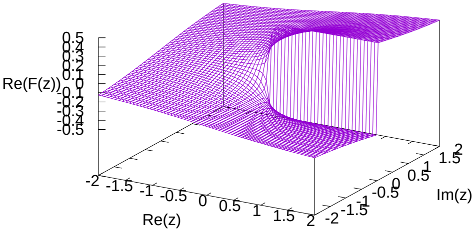
ステップ関数 $Y(x)$ の定義関数

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \log(-z)$$

のグラフ．実軸 $\mathbb{R}$ 上の境界値の差

$$F(x + \mathrm{i}0) - F(x - \mathrm{i}0)$$

がステップ関数 $Y(x)$ を表していることがわかる．



(5/6) Fourier 変換計算と佐藤超函数論

Fourier 変換の数値計算との関連.

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \mathfrak{F}_+[f](\xi + \mathrm{i}0) - \mathfrak{F}_-[f](\xi - \mathrm{i}0),$$

$$\mathfrak{F}_\pm[f](\zeta) = \pm \int_0^\infty f(\mp x)\mathrm{e}^{\pm 2\pi\mathrm{i}\zeta x}\mathrm{d}x \quad (\pm \operatorname{Im} \zeta > 0).$$

複素解析関数 $\mathfrak{F}_\pm[f](\zeta)$ の実軸上の境界値の差！
これが佐藤超函数論における Fourier 変換の定義.

Fourier 変換の数値計算との関連.

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \mathfrak{F}_+[f](\xi + \mathrm{i}0) - \mathfrak{F}_-[f](\xi - \mathrm{i}0),$$

$$\mathfrak{F}_\pm[f](\zeta) = \pm \int_0^\infty f(\mp x) \mathrm{e}^{\pm 2\pi \mathrm{i}\zeta x} \mathrm{d}x \quad (\pm \operatorname{Im} \zeta > 0).$$

複素解析関数 $\mathfrak{F}_\pm[f](\zeta)$ の実軸上の境界値の差！
これが佐藤超函数論における Fourier 変換の定義.

Fourier 変換の計算：佐藤超函数論との関連

- Fourier 変換 $\mathscr{F}[f](\xi)$ は $\mathfrak{F}_\pm[f](\zeta)$ $(\pm \operatorname{Im} \zeta > 0)$ を定義関数とする超函数である.
- 今回示した Fourier の数値計算法は，佐藤超函数論における Fourier 変換の定義をなぞったものである.

(6/6) まとめ

- Fourier 変換
$$\mathscr{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}x.$$
実は数値計算が難しい.
- （Fourier 変換の数値計算）
$$\mathscr{F}[f](\xi) = \mathfrak{F}_{+}[f](\xi+\mathrm{i}0) - \mathfrak{F}_{-}[f](\xi-\mathrm{i}0),$$
$$\mathfrak{F}_{\pm}[f](\zeta)\ :\ \text{上／下半平面}\ \pm\operatorname{Im}\zeta > 0\ \text{での解析関数}.$$
実数の世界では計算が難しいものを
複素数の世界で計算して，実数の世界に戻した（解析接続）.
- こんな事ができるのは，複素解析関数は離れた 2 点の値が密接に結びついているからである.
- 佐藤超函数論との関連.