Brown 運動の数学
確率過程・確率解析（１）

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 7 月 12 日（月）

はじめに：Brown 運動

Brown（ブラウン）運動

微粒子の水中などにおける不規則な運動．

- 1826–1827 年，R. Brown が発見（花粉中の微粒子）．
- 不規則運動は生物でも無生物でも普遍的に見られる．

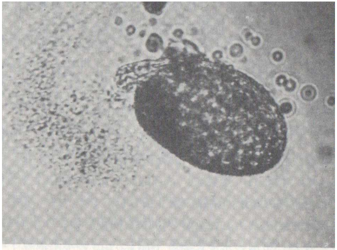


図 2.1　パンクした花粉とプッとはきだされた微粒子たち．

花粉中の微粒子
江沢洋・中村徹：ブラウン運動（朝倉書店，2020 年）より引用．

(YouTube) kagaku labo 「ブラウン運動　墨」
https://youtu.be/JNPEX_kJiWM

- Einstein（アインシュタイン），Langevin（ランジュバン），Perrin（ペラン），etc.
- Brown 運動は微粒子に多数の水分子が不規則に衝突することによって起こる．

  Langevin 方程式

$$M\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f(t),$$

  - 右辺第 2 項：ランダムな揺動力，
  - 右辺第 1 項：速度に比例する抵抗力．

はじめに：Brown 運動

Langevin 方程式

$$M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f(t),$$

右辺第 2 項：ランダムな揺動力.

Brown 運動の数学

解析学（微分方程式）& 確率論.

これからの内容

- 確率論の基礎…今回はここ.
- 確率過程.
- 確率微分方程式.
- 経路積分（量子力学）.

今回の内容

確率論の基礎.

1. 確率空間：確率論の舞台，測度論.
2. 確率変数：可測関数.
3. 期待値：Lebesgue 積分，密度関数.
4. 確率分布：二項分布，Poisson 分布，正規分布.
5. 独立な事象，条件付き確率・期待値.

確率論の基礎：(1/5) 確率空間

(例）サイコロ

- 目 $1, 2, \ldots, 6$ が出る確率：$\dfrac{1}{6}$.
- 2 または 5 の目が出る確率：
$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$
- $\ldots$

これを現代確率論の流儀に合わせて書き直す.

確率論の基礎：(1/5) 確率空間

サイコロの確率（現代確率論風）.

確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$.

- $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$（見本空間）
- $\mathfrak{B} = 2^{\Omega} := \{ \Omega$ の部分集合 $\}$ （事象の集合）
- $P : \mathfrak{B} \to [0, 1]$ （$P(E)$：事象 $E \in \mathfrak{B}$ の起こる確率）

- サイコロの目 $k(= 1, 2, \ldots, 6)$ が出る事象：$\{ k \}$.
- サイコロの目 $k(= 1, 2, \ldots, 6)$ が出る確率：

$$P(\{ k \}) = \frac{1}{6} \quad (k = 1, 2, \ldots, 6).$$

- 2 または 5 の出る確率：

$$P(\{ 2, 5 \}) = P(\{ 2 \} \cup \{ 5 \}) = P(\{ 2 \}) + P(\{ 5 \}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

確率論の基礎：(1/5) 確率空間

確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$

- Ω：集合（見本空間）．
- $\mathfrak{B} \subset 2^\Omega$：事象の集合．$\sigma$-加法族をなす（後述）．
- $P : \mathfrak{B} \to [0,1]$.
  - $P(E)$：事象 $E \in \mathfrak{B}$ の起こる確率.
  - $P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0$.
  - 完全加法性.

$$E_1, E_2, \ldots \in \mathfrak{B}, \quad E_m \cap E_n = \emptyset \;(\, m \neq n \,)$$
$$\Rightarrow \quad P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n).$$

- 2^Ω：Ω の部分集合全体からなる集合.
- 見本：Ω の元．事象の "最小単位"．
- 事象：$\mathfrak{B}$ の元である集合.

確率論の基礎：(1/5) 確率空間，σ-加法族

σ-加法族 $\mathfrak{B}(\subset 2^{\Omega})$

- $\Omega, \emptyset \in \mathfrak{B}$.
- $E \in \mathfrak{B} \Rightarrow E^c \in \mathfrak{B}$.
- 完全加法性：$E_1, E_2, \ldots \in \mathfrak{B} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{B}$.

- 有限加法性：$E, F \in \mathfrak{B} \Rightarrow E \cup F \in \mathfrak{B}$.

$$\because \quad E \cup F = E \cup F \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots \in \mathfrak{B}.$$

- 可算交差性：$E_1, E_2, \ldots \in \mathfrak{B} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{B}$.

$$\because \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c \right)^c \in \mathfrak{B}.$$

- 有限交差性：$E, F \in \mathfrak{B} \Rightarrow E \cap F \in \mathfrak{B}$.

確率論の基礎：(1/5) 確率空間，σ-加法族

σ-加法族 $\mathfrak{B}(\subset 2^{\Omega})$

- $\Omega, \emptyset \in \mathfrak{B}$.
- $E \in \mathfrak{B} \Rightarrow E^c \in \mathfrak{B}$.
- 完全加法性：$E_1, E_2, \ldots \in \mathfrak{B} \ \Rightarrow \ \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{B}$.

- $E \in \mathfrak{B} \ \Rightarrow \ E^c \in \mathfrak{B}$.
  E が事象なら，E が起こらないこと (E^c) も事象である．
- $E_1, E_2, \ldots \ \Rightarrow \ \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \ \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{B}$.
  $E_1, E_2, \ldots$ が事象なら，
  ある E_n が起こること $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$，
  すべての E_n が起こること $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ も事象である．

確率論の基礎：(1/5) 確率空間，Borel 集合

Borel 集合族 $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$

- $\mathbb{R}^d$ の開集合全体 $\mathscr{O}$ が生成する σ-加法族，i.e., $\mathscr{O}$ を含む最小の $\mathbb{R}^d$ の σ-加法族.
- Borel 集合：$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ の元である集合.

$\mathbb{R}^d$ の開集合族 $\mathscr{O}$ に，

- 開集合の補集合（閉集合），
- 可算個の開集合の和集合，共通部分，
- さらに，それらの補集合，和集合，共通部分，
- $\dots$

を付け加えたものが，Borel 集合族 $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ である.

（例）サイコロ．

$$\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \},$$

各 $k \in \Omega$ ... サイコロの目 k が出るということ（事象の最小単位），

$X(k) = k$ ... サイコロの目の値.

確率現象の結果として得られる数値は，事象の最小単位（見本）$\omega \in \Omega$ を引数とする関数 $X(\omega)$ として扱われる．…確率変数

確率論の基礎：(2/5) 確率変数

確率変数 $X(\omega)$

- Ω から $\mathbb{R}$ への写像 $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- $\mathfrak{B}$ に関して**可測関数**である，i.e.,

$$X^{-1}(B) = \{\, \omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B \,\} \in \mathfrak{B} \quad (\, \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \,).$$

とくに，$-\infty < a < b < \infty$ として，

$$\begin{aligned}
&(1) \quad X^{-1}((a,b)), X^{-1}((a,\infty)), X^{-1}((-\infty,b)) \in \mathfrak{B}, \\
&(2) \quad X^{-1}([a,b]), X^{-1}([a,\infty)), X^{-1}((-\infty,b]) \in \mathfrak{B}, \\
&(3) \quad X^{-1}(\{a\}) \in \mathfrak{B}.
\end{aligned}$$

$$\because \quad X^{-1}([a,b]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} X^{-1}\left(\left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)\right) \in \mathfrak{B}, \quad \text{etc.}$$

$X(\omega)$ は可測関数である

$$X^{-1}(B) = \{\, \omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B \,\} \in \mathfrak{B} \quad (\, \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \,).$$

「可測」の意味.

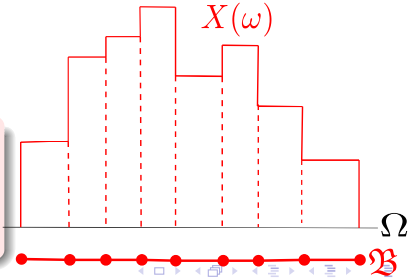
$$X(\omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot 1_{A_x}(\omega), \quad A_x = \{\, \omega \in \Omega \mid X(\omega) = x \,\},$$

$*$ 集合 $A \subset \Omega$ に対し $1_A(\omega) := \begin{cases} 1 & (\,\omega \in A\,) \\ 0 & (\,\omega \notin A\,). \end{cases}$

$$A_x \in \mathfrak{B} \quad (\, \forall x \in X(\Omega) \,).$$

$$\Downarrow$$

$X(\omega)$ の値の情報（どこでどういう値を取るか）を与えるのに，十分細かく Ω が $\mathfrak{B}$ により細分されている.



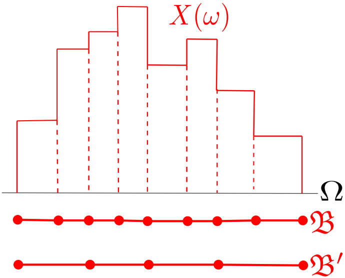
確率論の基礎：(2/5) 確率変数

$X(\omega)$ は可測関数である

$$X^{-1}(B) = \{\,\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\,\} \in \mathfrak{B} \quad (\,\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\,).$$

$\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$：二つの σ-加法族，$\mathfrak{B} \supset \mathfrak{B}'$
（$\mathfrak{B}'$ は $\mathfrak{B}$ より刻みが粗い）.

$X(\omega)$ は $\mathfrak{B}$ に関して可測だが，
$\mathfrak{B}'$ に関して可測でない.



確率論の基礎：(3/5) 期待値

- $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$：確率空間
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$：確率変数

$$X(\omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot 1_{A_x}(\omega), \quad A_x = \{\, \omega \in \Omega \mid X(\omega) = x \,\}.$$

$$(X \text{ の期待値}) = \sum_x x \cdot (X = x \text{ となる確率}),$$

$$(X = x \text{ となる確率}) = P(A_x)$$

であったから，

$$X \text{ の期待値} \quad E(X) := \sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(A_x).$$

離散的な確率現象（Ω が高々可算無限集合）の場合はこれで OK.
連続的な確率現象の場合，右辺の和の定義は？

期待値の定義（連続的な確率現象）

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega)P(\mathrm{d}\omega) \quad \text{Lebesgue（ルベーグ）積分.}$$

Lebesgue 積分の定義：細かく刻む（微積分の常套手段）.

- $X(\omega)$ の値域 $[a, b]$ を分割：

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

- $X(\omega)$ を離散近似：

$$X(\omega) \simeq X_n(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i 1_{\Delta\Omega_i}(\omega),$$

$$\Delta\Omega_i = \{\, \omega \in \Omega \mid x_i \leq X(\omega) < x_{i+1} \,\}.$$

- $E(X_n)$ を求めて刻みを限りなく細かくする ($n \to \infty$)：

$$\int_\Omega X(\omega)P(\mathrm{d}\omega) = \lim_{n\to\infty} E(X_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} x_i P(\Delta\Omega_i).$$

期待値の定義（連続的な確率現象）

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega)P(\mathrm{d}\omega) \quad \text{Lebesgue 積分.}$$

Lebesgue 積分の（大雑把な）定義

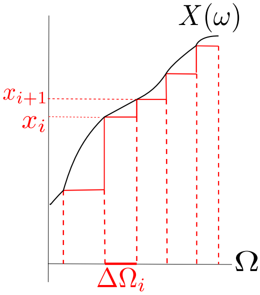
- $X(\omega)$ の値域 $[a, b]$ を分割：

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

- 折れ線の下の面積を求め，
  刻みを限りなく細かくする．

$$\int_\Omega X(\omega)P(\mathrm{d}\omega) := \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} x_i P(\Delta\Omega_i),$$

$$\Delta\Omega_i = \{\, \omega \in \Omega \mid x_i \le X(\omega) < x_{i+1} \,\}.$$



従来の Riemann 積分の性質は大抵，Lebesgue 積分でも成立する．
$X(\omega), Y(\omega)$：確率変数（可測関数），$a, b \in \mathbb{R}$：定数．

$$(1) \quad \int_\Omega [aX(\omega) + bY(\omega)]P(\mathrm{d}\omega) = a\int_\Omega X(\omega)P(\mathrm{d}\omega) + b\int_\Omega Y(\omega)P(\mathrm{d}\omega),$$

$$(2) \quad X(\omega) \leq Y(\omega) \quad \text{a.s.} \quad \Longrightarrow \quad \int_\Omega X(\omega)P(\mathrm{d}\omega) \leq \int_\Omega Y(\omega)P(\mathrm{d}\omega),$$

$$(3) \quad \left|\int_\Omega X(\omega)P(\mathrm{d}\omega)\right| \leq \int_\Omega |X(\omega)|P(\mathrm{d}\omega),$$

a.s. ＝ ほとんど確実に (almost surely)

$$\ldots \text{ a.s.} \quad \Longleftrightarrow \quad P(\{\,\omega \in \Omega \mid \ldots \text{が起きない}\,\}) = 0.$$

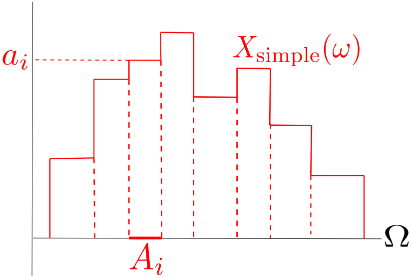
確率論の基礎：(3/5) 期待値，Lebesgue 積分

単関数　$X_{\mathrm{simple}}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(\omega), \quad A_i \in \mathfrak{B} \quad (\, i = 1, \ldots, n \,).$

$$\Downarrow$$

$$\int_\Omega X_{\mathrm{simple}}(\omega) P(\mathrm{d}\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i P(A_i).$$

数学的には，Lebesgue 積分は単関数の積分の極限として定義される．



確率論の基礎：(3/5) 期待値，密度関数

実際の計算は従来の Riemann 積分でできる．

確率変数 $X(\omega)$ の確率分布 $P_X : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$.

$$P_X(B) := P(\{\,\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\,\}) \quad (\,B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\,).$$

$B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ としてとくに微小区間 $[x, x+\Delta x)$ をとる．

$$P_X([x, x+\Delta x)) = P(\{\,\omega \mid x \leq X(\omega) < x+\Delta x\,\}) =: \mu(x)\Delta x,$$

$\mu(x)$ ：確率変数 $X(\omega)$ の**密度関数**.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\mu(x)\mathrm{d}x,$$

$\mu(x)\Delta x :=$（$x \leq X(\omega) < x+\Delta x$ となる確率）.

主要な確率分布.

- 二項分布 $B(n, p)$ ($n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $0 < p < 1$)
  コイン（表が出る確率 p）を n 回投げて k 回表が出る確率.

$$P_X(\{ k \}) = {}_n\mathrm{C}_k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\, {}_n\mathrm{C}_k p^k (1-p)^{n-k} = np.$$

- Poisson 分布 P_λ ($\lambda > 0$).

$$P_X(\{ k \}) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda.$$

$*$ いずれも直接計算により，全確率 $= \sum_k P(\{ k \}) = 1$ が確かめられる.

確率論の基礎：(4/5) 確率分布，Poisson 分布

Poisson 分布：出現確率の極めて小さい確率現象に対する確率分布．

二項分布 $B(n, \lambda/n)$：

$$P(\{ k \}) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

極限 $n \to \infty$ を考える．

$$\frac{n!}{(n-k)!n^k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \to 1 \quad (\, n \to \infty \,),$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \to \mathrm{e}^{-\lambda} \quad (\, n \to \infty \,).$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} P(\{ k \}) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

二項分布 $B(n, p)$：n が大きいとき，

$$P(\{ k \}) \approx \frac{(np)^k}{k!}\mathrm{e}^{-np}.$$

正規分布 $N(m,\sigma^2)$ ($m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$)

$$P(\{\,\omega \mid a \le X(\omega) < b\,\}) = \int_a^b \mu(x)\mathrm{d}x,$$

確率密度 $$\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

- 全確率=1.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mu(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}x = 1.$$

- $X(\omega)$ の期待値.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\mu(x)\mathrm{d}x = m.$$

$X(\omega)$ の分散 $V(X)$，標準偏差 $\sigma(X)$.

$$V(X) := E\left([X - E(X)]^2\right) \overset{(1)}{=} E\left(X^2\right) - E(X)^2,$$
$$\sigma(X) := \sqrt{V(X)}.$$

等号 (1) の導出． 一般に，

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \quad （X, Y：確率変数，a, b：定数）$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left(X^2 - 2E(X)X + E(X)^2\right) \\ &= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2. \end{aligned}$$

主な確率分布の期待値，標準偏差．

	期待値 $E(X)$	標準偏差 $\sigma(X)$
二項分布 $B(n,p)$	np	$\sqrt{np(1-np)}$
Poisson 分布 P_λ	λ	$\sqrt{\lambda}$
正規分布 $N(m,\sigma^2)$	m	σ

確率論の基礎：(5/5) 独立な事象，条件付き確率・期待値

二つの事象 $A, B \in \mathfrak{B}$ は独立である．

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

条件付き確率

事象 $B \in \mathfrak{B}$ が起こったとき事象 $A \in \mathfrak{B}$ が起きる条件付き確率

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

$A, B \in \mathfrak{B}$ が独立な事象ならば，

$$P(A|B) = P(A).$$

事象 A の確率は，事象 B が起きるか否かに影響されない．

確率変数 $X(\omega), Y(\omega)$ は独立である.

$$
\begin{aligned}
&P\left(\{\,\omega \mid X(\omega) \in A\,\} \cap \{\,\omega \mid Y(\omega) \in B\,\}\right) \\
&= P(\{\,\omega \mid X(\omega) \in A\,\}) \cdot P(\{\,\omega \mid Y(\omega) \in B\,\}) \quad (\,\forall A, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\,),
\end{aligned}
$$

i.e.,

$$
\begin{aligned}
&（X(\omega) \in A \;\&\; Y(\omega) \in B \text{ となる確率}） \\
&= （X(\omega) \in A \text{ となる確率}） \cdot （Y(\omega) \in B \text{ となる確率}） \quad (\,\forall A, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\,).
\end{aligned}
$$

$X(\omega), Y(\omega)$ 一方の値がどうなるかは，他方の値がどうなるかには影響しない.

確率論の基礎：(5/5) 独立な事象，条件付き確率・期待値

$X(\omega), Y(\omega)$ が独立な確率変数ならば，$E(XY) = E(X)E(Y)$.

（証明）確率変数 $X(\omega), Y(\omega)$ の値域 $[a, b]$, $[c, d]$ を次のように分割する．

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d,$$

$$\Delta\Omega_i^{(X)} = \{\, \omega \in \Omega \mid x_i \leq X(\omega) < x_{i+1} \,\}, \quad \Delta\Omega_j^{(Y)} = \{\, \omega \in \Omega \mid y_j \leq Y(\omega) < y_{j+1} \,\}.$$

このとき，

$$X(\omega) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} x_i \mathbf{1}_{\Delta\Omega_i^{(X)}}(\omega),$$

$$Y(\omega) \simeq \sum_{j=0}^{m-1} y_j \mathbf{1}_{\Delta\Omega_j^{(Y)}}(\omega),$$

$$X(\omega)Y(\omega) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} x_i y_j \mathbf{1}_{\Delta\Omega_i^{(X)} \cap \Delta\Omega_j^{(Y)}}(\omega).$$

$X(\omega), Y(\omega)$ が独立な確率変数ならば，$E(XY) = E(X)E(Y)$.

（証明）確率変数 $X(\omega), Y(\omega)$ の値域 $[a, b]$, $[c, d]$ を次のように分割する．

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d,$$

$$\Delta\Omega_i^{(X)} = \{\, \omega \in \Omega \mid x_i \le X(\omega) < x_{i+1} \,\}, \quad \Delta\Omega_j^{(Y)} = \{\, \omega \in \Omega \mid y_j \le Y(\omega) < y_{j+1} \,\}.$$

このとき，

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_\Omega X(\omega)Y(\omega)P(\mathrm{d}\omega) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} x_i y_j P(\Delta\Omega_i^{(X)} \cap \Delta\Omega_j^{(Y)}) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} x_i y_j P(\Delta\Omega_i^{(X)})P(\Delta\Omega_j^{(Y)}) \\ &= \left\{\sum_{i=0}^{n-1} x_i P(\Delta\Omega_i^{(X)})\right\}\left\{\sum_{j=0}^{m-1} y_j P(\Delta\Omega_j^{(Y)})\right\} \\ &= \int_\Omega X(\omega)P(\mathrm{d}\omega) \cdot \int_\Omega Y(\omega)P(\mathrm{d}\omega) = E(X)E(Y). \end{aligned}$$

確率論の基礎：(5/5) 独立な事象，条件付き確率・期待値

事象 $B \in \mathfrak{B}$ が起こったときの確率変数 $X(\omega)$ の条件付き期待値

$$E(X|B) := \frac{1}{P(B)} \int_B X(\omega) P(\mathrm{d}\omega),$$

$$\text{where} \quad \int_B X(\omega) P(\mathrm{d}\omega) := \int_S X(\omega) 1_B(\omega) P(\mathrm{d}\omega),$$

$X(\omega)$ の値域 $[a, b]$ を $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ と分割すれば，

$$E(X|B) = \frac{1}{P(B)} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} x_i P\left(\Delta\Omega_i \cap B\right),$$

$$\Delta\Omega_i = \{\, \omega \mid x_i \le X(\omega) < x_{i+1} \,\}.$$

確率変数 $X(\omega)$ の事象 $B \in \mathfrak{B}$ のもとでの条件付き期待値

$$E(X|B) = \frac{1}{P(B)} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} x_i P\left(\Delta\Omega_i \cap B\right),$$
$$\Delta\Omega_i = \{\, \omega \mid x_i \le X(\omega) < x_{i+1} \,\}.$$

確率変数 $X(\omega)$ が事象 B と独立である，i.e.,

$$P(\{\, \omega \mid X(\omega) \in A \,\} \cap B) = P(\{\, \omega \mid X(\omega) \in A \,\}) \cdot P(B) \quad (\, \forall A \in \mathfrak{B} \,)$$

ならば，

$$E(X|B) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} x_i P(\Delta\Omega_i).$$

確率論の基礎：(5/5) 独立な事象，条件付き確率・期待値

確率変数 $X(\omega)$ の事象 $B \in \mathfrak{B}$ のもとでの条件付き期待値

$$E(X|B) = \frac{1}{P(B)} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} x_i P\left(\Delta\Omega_i \cap B\right),$$

$$\Delta\Omega_i = \{\, \omega \mid x_i \le X(\omega) < x_{i+1} \,\}.$$

確率変数 $X(\omega)$ が事象 B と独立である，i.e.,

$$P(\{\, \omega \mid X(\omega) \in A \,\} \cap B) = P(\{\, \omega \mid X(\omega) \in A \,\}) \cdot P(B) \quad (\,\forall A \in \mathfrak{B}\,)$$

ならば,

$$E(X|B) = \int_\Omega X(\omega) P(\mathrm{d}\omega) = E(X).$$

$X(\omega)$ の期待値は，事象 B が起きるか否かに影響されない.

確率論の基礎：(5/5) 独立な事象，条件付き確率・期待値

$\mathfrak{B}'$: $\mathfrak{B}$ の部分 σ-加法族 ($\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$).

条件 $\mathfrak{B}'$ のもとでの $X(\omega)$ の条件付き期待値 $E(X|\mathfrak{B}')(\omega)$
という $\mathfrak{B}'$-可測関数（確率変数）を考える．

まず，$\mathfrak{B} \supset \mathfrak{B}'$ が次のように「分割」で与えられる場合を考える．

- Ω の分割 $\{ \Delta\Omega_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Delta\Omega_\lambda = \Omega, \quad \Delta\Omega_\lambda \cap \Delta\Omega_{\lambda'} = \emptyset \quad (\lambda \neq \lambda'),$$

$$\mathfrak{B} = \{ \{ \Delta\Omega_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda} \cup \{ \emptyset \} \text{ の集合の和集合} \}.$$

- Ω の分割 $\{ \Delta\Omega'_\mu \}_{\mu \in M}$:

$$\bigcup_{\mu \in M} \Delta\Omega'_\mu = \Omega, \quad \Delta\Omega'_\mu \cap \Delta\Omega'_{\mu'} = \emptyset \quad (\mu \neq \mu'),$$

$$\mathfrak{B}' = \left\{ \{ \Delta\Omega'_\mu \}_{\mu \in M} \cup \{ \emptyset \} \text{ の集合の和集合} \right\}.$$

$\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$ より，各 $\Delta\Omega'_\mu$ は $\{ \Delta\Omega_\lambda \} \cup \{ \emptyset \}$ の集合の和集合である．

- Ω の分割 $\{\, \Delta\Omega_\lambda \,\}_{\lambda\in\Lambda}$:

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Delta\Omega_\lambda = \Omega,$$

$$\Delta\Omega_\lambda \cap \Delta\Omega_{\lambda'} = \emptyset \quad (\, \lambda \neq \lambda' \,),$$

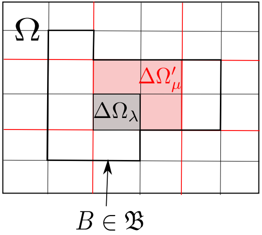
$$\mathfrak{B} = \{\, \{\, \Delta\Omega_\lambda \,\}_{\lambda\in\Lambda} \cup \{\, \emptyset \,\} \text{ の集合の和集合} \,\}.$$

- Ω の分割 $\{\, \Delta\Omega'_\mu \,\}_{\mu\in M}$:

$$\bigcup_{\mu\in M} \Delta\Omega'_\mu = \Omega,$$

$$\Delta\Omega'_\mu \cap \Delta\Omega'_{\mu'} = \emptyset \quad (\, \mu \neq \mu' \,),$$

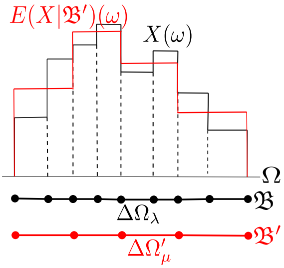
$$\mathfrak{B}' = \left\{\, \{\, \Delta\Omega'_\mu \,\}_{\mu\in M} \cup \{\, \emptyset \,\} \text{ の集合の和集合} \,\right\}.$$



確率変数 $X(\omega)$（$\mathfrak{B}$-可測関数）

$$X(\omega) = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda 1_{\Delta\Omega_\lambda}(\omega),$$

$$\text{where}\quad 1_E = \begin{cases} 1 & (\ \omega \in E\ ) \\ 0 & (\ \omega \notin E\ ). \end{cases}$$



条件付き期待値 $E(X|\mathfrak{B}')(\omega)$（$\mathfrak{B}'$-可測関数）

$$E(X|\mathfrak{B}')(\omega) := E(X|\Delta\Omega'_\mu) \quad \text{if} \quad \omega \in \Delta\Omega'_\mu,$$

i.e.,

$$E(X|\mathfrak{B}')(\omega) := \sum_{\mu\in M} E(X|\Delta\Omega'_\mu) 1_{\Delta\Omega'_\mu}(\omega)$$

$$= \sum_{\mu\in M} \frac{1}{P(\Delta\Omega'_\mu)} \left\{ \sum_{\lambda:\Delta\Omega_\lambda\subset\Delta\Omega'_\mu} x_\lambda P(\Delta\Omega_\lambda) \right\} 1_{\Delta\Omega'_\mu}(\omega).$$

各 $\Delta\Omega'_\mu$ 毎に $X(\omega)$ を平均したものが $E(X|\mathfrak{B}')(\omega)$.

1. $E(E(X|\mathfrak{B}')) = E(X)$.
2. X が $\mathfrak{B}'$-可測ならば，$E(X|\mathfrak{B}') = X$.
3. Y が $\mathfrak{B}'$-可測ならば，$E(YX|\mathfrak{B}') = YE(X|\mathfrak{B}')$.

(1) のみ証明する．

$$
\begin{aligned}
E(E(X|\mathfrak{B}')) &= \int_\Omega E(X|\mathfrak{B}')(\omega)P(\mathrm{d}\omega) \\
&= \int_\Omega \sum_{\mu\in M} \frac{1}{P(\Delta\Omega'_\mu)} \left\{ \sum_{\lambda:\Delta\Omega_\lambda\subset\Delta\Omega'_\mu} x_\lambda P(\Delta\Omega_\lambda) \right\} 1_{\Delta\Omega'_\mu}(\omega)P(\mathrm{d}\omega) \\
&= \sum_{\mu\in M} \frac{1}{P(\Delta\Omega'_\mu)} \left\{ \sum_{\lambda:\Delta\Omega_\lambda\subset\Delta\Omega'_\mu} x_\lambda P(\Delta\Omega_\lambda) \right\} \cdot P(\Delta\Omega'_\mu) \\
&= \sum_{\mu\in M} \sum_{\lambda:\Delta\Omega_\lambda\subset\Delta\Omega'_\mu} x_\lambda P(\Delta\Omega_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda P(\Delta\Omega_\lambda) = E(X).
\end{aligned}
$$

条件付き期待値の一般的（抽象的）定義

- $((\Omega, \mathfrak{B}, P)$: 確率空間.
- $X(\omega)$: 確率変数.
- $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$: 部分 σ-加法族.

$$\int_A Y(\omega)P(\mathrm{d}\omega) = \int_A X(\omega)P(\mathrm{d}\omega) \quad (\forall A \in \mathfrak{B}'\ )$$

を満たす $\mathfrak{B}'$-可測関数 $Y(\omega)$ が唯一つ存在する.
この $Y(\omega)$ を $X(\omega)$ の条件 $\mathfrak{B}'$ の下での条件付き期待値とよび,
$E(X|\mathfrak{B}')(\omega)$ と記す.

（直感的イメージ…最初はこれ）

$E(X|\mathfrak{B}')(\omega)$: $X(\omega)$ を粗いメッシュ$\mathfrak{B}'$ において粗視化したもの.

まとめ

- Brown 運動→解析学& 確率論．
- 確率論の基礎．

  確率空間，確率変数，期待値，事象の独立，
  条件付き確率・期待値，etc.
- 条件付き期待値（という確率変数）
  →確率過程を考える時，頻出する．

次回以降の予定．

- 確率過程論．
- Brown 運動の物理．
- ...