Brown 運動の数学
確率過程・確率解析（２）

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 8 月 3 日（火）

今回の内容

今回のテーマ

試行の繰り返し.

試行の繰り返しで見えてくるものがある.

- 大数の法則
- 中心極限定理

Brown 運動（確率過程）: 確率的移動の積み重ね.

- 酔歩
- Wiener 過程…Brown 運動の数学モデル
- 確率過程を考える確率空間

(1/3) 大数の法則

確率は直接にはわからない．

では，どうやって確率を調べるかというと…

- サイコロの 1 の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$.
  サイコロを 60 回投げたら，10 回くらい 1 の目が出る．
- コイン投げで表の出る確率は $\dfrac{1}{2}$.
  コイン投げを 100 回やったら，50 回くらい表が出る．
- …

同じ試行を繰り返して着目する事象の起こる割合を勘定したら，
それが（ほぼ）事象の確率である．…大数の法則

大数の法則 (Bernoulli)

- 1 回の試行で事象 E が確率 p で起こるとする.
- X_n : この試行を各回独立に n 回行い，事象 E が起こる回数.

任意の $\epsilon > 0$ に対し $N = N(\epsilon) \in \mathbb{Z}_{>0}$ を十分大きく取れば,

$$P\left(\left| \frac{X_n}{n} - p \right| > \epsilon \right) < \epsilon \quad (\,\forall n > N\,).$$

数多く試行すれば，確率的に

事象が起こる回数の割合 $\approx$ 事象が起こる確率.

(1/3) 大数の法則（証明）

まず，次の不等式を準備する．

Chebyshev の不等式

$$P(\,|X - E(X)| > a\sigma(X)\,) \leq \frac{1}{a^2} \quad (\,\forall a > 0\,).$$

$\because$ $m = E(X)$ とおく．

$$\begin{aligned}
\sigma(X)^2 &= \int_\Omega (X-m)^2 P(\mathrm{d}\omega) \geq \int_{|X-m|>a\sigma(X)} (X-m)^2 P(\mathrm{d}\omega) \\
&\geq a^2\sigma(X)^2 \int_{|X-m|>a\sigma(X)} P(\mathrm{d}\omega) \\
&= a^2\sigma(X)^2 P(|X-m| > a\sigma(X)).
\end{aligned}$$

■

(1/3) 大数の法則（証明）

（大数の法則の証明）確率変数 Y_i ($1 \leq i \leq n$) を次で定める．

$$Y_i = \begin{cases} 1 & i \text{ 回目の試行で事象 } E \text{ が起こる} \\ 0 & i \text{ 回目の試行で事象 } E \text{ が起こらない.} \end{cases}$$

$Y_1, \ldots, Y_n$ は独立．このとき $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ であり，

$$E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\{E(Y_1) + \cdots + E(Y_n)\} = \frac{\overbrace{p + \cdots + p}^{n \text{ 個}}}{n} = p,$$

$$\begin{aligned} E\left(\frac{X_n^2}{n^2}\right) &= \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{n} E(Y_i^2) + 2\sum_{i<j} E(Y_i Y_j)\right\} \\ &= \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{n} E(Y_i^2) + 2\sum_{i<j} E(Y_i)E(Y_j)\right\} \\ &= \frac{1}{n^2}\left\{np + n(n-1)p^2\right\} = \frac{p}{n} + \frac{n-1}{n}p^2, \end{aligned}$$

$$V\left(\frac{X_n}{n}\right) = E\left(\frac{X_n^2}{n^2}\right) - E\left(\frac{X_n^2}{n^2}\right)^2 = \frac{p(1-p)}{n}.$$

(1/3) 大数の法則（証明）

Chebyshev の不等式を X_n/n に適用して，

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>a\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)<\frac{1}{a^2}\quad(\forall a>0).$$

とくに $a^2=1/\epsilon$ ととり，$\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}<\epsilon^{3/2}$ となるように $N\in\mathbb{Z}_{>0}$ を取れば，$n>N$ のとき

$$a\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\leq a\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}<\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\cdot\epsilon^{3/2}=\epsilon$$

となるから，

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>\epsilon\right)\leq P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>a\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)\leq\epsilon.$$

■

(2/3) 中心極限定理

中心極限定理

たくさんの試行の和を取ると，その確率分布は正規分布に近くなる．

もとの試行はどのような確率分布に従おうとも…

（復習）正規分布 $N(m, \sigma^2)$

$$P(\ x \leq X < x + \mathrm{d}x\ ) = \mu(x)\mathrm{d}x,$$

$$\text{確率密度}\quad \mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right),$$

(2/3) 中心極限定理：特性関数

（準備）「特性関数」を定義する．

確率密度 $\mu(x)$ の特性関数

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}zx} \mathrm{d}x \quad \text{（確率密度の Fourier 変換）}.$$

確率に Fourier 変換は一見，あまり関係なさそうに見えるが…

正規分布 $N(m, \sigma^2)$ の場合．

$$\text{確率密度} \quad \mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \exp(\mathrm{i}zx) \mathrm{d}x,$$

$$\therefore \quad \text{特性関数} \quad \varphi(z) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} z^2 + \mathrm{i}mz\right).$$

(2/3) 中心極限定理：特性関数

X, Y：独立な確率変数，確率密度 μ_X, μ_Y，特性関数 $\varphi_X(z), \varphi_Y(z)$.
和 $Z = X + Y$ について，

$$Z(\omega) = x \quad \Leftrightarrow \quad \exists y \quad \text{s.t.} \quad X(\omega) = y \ \& \ Y(\omega) = x - y,$$

$$\mu_Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_X(y)\mu_Y(x-y)\mathrm{d}y =: \mu_X * \mu_Y(x) \quad \text{畳み込み積},$$

Fourier 変換の性質より，

$$\varphi_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mu_X * \mu_Y)(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}zx}\mathrm{d}x = \varphi_X(z)\varphi_Y(z).$$

(2/3) 中心極限定理：特性関数

X, Y：独立な確率変数，確率密度 μ_X, μ_Y，特性関数 $\varphi_X(z), \varphi_Y(z)$.
和 $Z = X + Y$ について，

$$Z(\omega) = x \quad \Leftrightarrow \quad \exists y \quad \text{s.t.} \quad X(\omega) = y \ \&\ Y(\omega) = x - y,$$

$$\mu_Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_X(y)\mu_Y(x-y)\mathrm{d}y =: \mu_X * \mu_Y(x) \quad \text{畳み込み積},$$

Fourier 変換の性質より，

$$\varphi_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mu_X * \mu_Y)(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}zx}\mathrm{d}x = \varphi_X(z)\varphi_Y(z).$$

X, Y を独立な確率変数とすると，

$$\mu_{X+Y}(x) = \mu_X * \mu_Y(x),$$
$$\varphi_{X+Y}(z) = \varphi_X(z)\varphi_Y(z).$$

$\varphi_Z(z) = \varphi_X(z)\varphi_Y(z)$ の証明.

$$
\begin{aligned}
\varphi_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_X * \varphi_Y)(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}zx} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(y)\varphi_Y(x-y) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}zx} \mathrm{d}x \\
&\quad \text{（積分順序を交換する）} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(y) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_Y(x-y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}z(x-y)} \mathrm{d}x \right\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}zy} \mathrm{d}y \\
&= \mu_Y(z) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}zy} \mathrm{d}y \\
&= \mu_X(z)\mu_Y(z).
\end{aligned}
$$

■

(2/3) 中心極限定理

中心極限定理

$X_1, \ldots, X_n$：同一の確率分布に従う独立な確率変数．平均 0，分散 1．

$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$$

の確率分布は極限 $n \to \infty$ において，標準正規分布 $N(0,1)$ に近づく．

X_k ($1 \leq k \leq n$) がどんな確率分布に従おうと， 成立する．

(2/3) 中心極限定理

中心極限定理

$X_1, \ldots, X_n$：同一の確率分布に従う独立な確率変数．平均 0，分散 1．

$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$$

の確率分布は極限 $n \to \infty$ において，標準正規分布 $N(0,1)$ に近づく．

X_k ($1 \leq k \leq n$) がどんな確率分布に従おうと， 成立する．

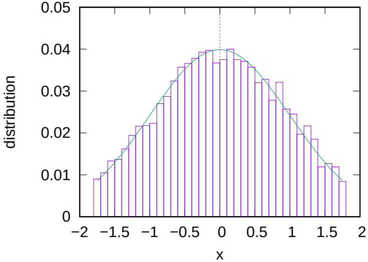
$X_1, \ldots, X_n$：同一の確率分布に従う独立な確率変数．平均 0，分散 σ^2．
n が大きいとき，

$$\mu_{X_1+\cdots+X_n}(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{2n\sigma^2}\right).$$

(2/3) 中心極限定理

数値実験で中心極限定理を確認.

- X_n ：区間 $[-\sqrt{3} : \sqrt{3}]$ 上に一様に値を取る確率変数（乱数）.
- $Z_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$　$(\ n = 100\ )$.
- 10000 回試行して，Z_n の分布を求めた.



（曲線は正規分布のグラフ）

(2/3) 中心極限定理：証明

$X_1, \ldots, X_n$ に共通の確率密度を μ，$Z_n = (X_1 + \cdots + X_n)/\sqrt{n}$ の確率密度を μ_n とすると，

$$\mu_n(x) = \sqrt{n}(\underbrace{\mu * \cdots * \mu}_{n\text{ 個}})(\sqrt{n}x).$$

$X_1, \ldots, X_n$ の特性関数を φ，Z_n の特性関数を φ_n とすると，

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= \sqrt{n}\int_{-\infty}^{\infty}(\mu * \cdots * \mu)(\sqrt{n}x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}zx}\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(\mu * \cdots * \mu)(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z/\sqrt{n})\xi}\mathrm{d}\xi, \\ \therefore \quad \varphi_n(z) &= \left\{\varphi\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n. \end{aligned}$$

$\varphi_n(z)$ の $z = 0$ における Taylor 級数展開を求める．

全確率 $=1$ より，

$$\varphi(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}zx}\mu(x)\mathrm{d}x\Big|_{z=0}=1.$$

$E(X_k)=0,\ V(X_k)=1$ より，

$$\varphi'(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{i}x\mathrm{e}^{\mathrm{i}zx}\mu(x)\mathrm{d}x\Big|_{z=0}=0,\quad \varphi''(0)=-\int_{-\infty}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}zx}\mu(x)\mathrm{d}x\Big|_{z=0}=-1,$$

$$\therefore\quad \varphi\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)=1-\frac{z^2}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\varphi_n(z)=\left(1-\frac{z^2}{2n}\right)^n+\mathrm{o}(1)=\mathrm{e}^{-z^2/2}+\mathrm{o}(1).$$

ここで個々の確率分布の「個性」は消える．

この逆 Fourier 変換をとり，極限 $n\to\infty$ をとると，

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx}\mathrm{e}^{-z^2/2}\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

右辺は標準正規分布 $N(0,1)$ の確率密度に他ならない． ■

(3/3) Wiener 過程（確率過程）

これからやること．

Brown 運動の数学モデルをつくる…Wiener 過程

- Brown 運動：微粒子が水中などで水分子などのランダムな衝突を受け，デタラメに運動する．
- Brown 運動の数学モデル：確率的移動の足し合わせ．
  「酔歩 (random walk)」から出発する．
- 確率過程：時間変化する確率変数．
  確率過程のベースとなる確率空間はどうなるか？

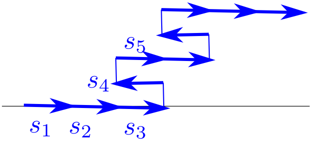
一次元酔歩

$$x_n = x_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_n.$$

- 初期時刻 t_0 に位置 x_0 にいる．
- k ステップ目の時刻 $t_k = t_0 + k\epsilon$ に，s_k だけランダムに変位．

$$\text{平均} \quad \langle s_k \rangle = 0, \quad \text{分散} \quad \left\langle (s_k - \langle s_k \rangle)^2 \right\rangle = \langle s_k^2 \rangle = \sigma^2.$$

- s_k，s_l ($k \neq l$) は独立である．
- x_n ：n ステップ目（時刻 t_n）における位置．



(3/3) Wiener 過程（確率過程）：酔歩

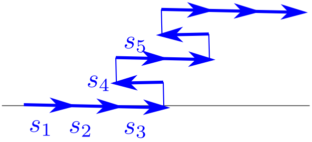
$$x_n = x_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_n.$$

$$\langle (x_n - x_0)^2 \rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} s_i \right)^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle s_i^2 \rangle + \sum_{i \neq j} \underbrace{\langle s_i s_j \rangle}_{\langle s_i \rangle \langle s_j \rangle = 0}$$

$$= n\sigma^2 \propto t_n - t_0,$$

$$\langle (x_n - x_0)^2 \rangle = 2D(t_n - t_0) \quad (\ D > 0\ :\ \text{const.}\ ).$$

標準偏差は (時間)$^{1/2}$ に比例する.



(3/3) Wiener 過程（確率過程）

Wiener 過程

Brown 運動を数学的な確率過程として表したもの．

一次元酔歩モデルをもとに「Wiener 過程」を構成する．
次の一次元酔歩モデルを考える．

$$x_n = x_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_n.$$

- 初期時刻 t_0 に位置 x_0 にいる．
- k ステップ目の時刻 $t_k = t_0 + k\epsilon$ （時間刻み ϵ）に，
  s_k だけランダムに変位．
  変位の大きさ $\sqrt{2D\epsilon}$ ($D > 0$). $\cdots$ （微小時間 ϵ）$^{1/2}$ に比例
  確率 1/2 で正方向へ，確率 1/2 で負方向へ変位．
- s_k, s_l ($k \neq l$) は独立な確率変数である．
- x_n : n ステップ目（時刻 t_n）における位置．

(3/3) Wiener 過程（確率過程）

n ステップ中 k 回正方向へ変位，$n-k$ 回負方向へ変位するとする．
時刻 $t_n = t_0 + n\epsilon$ における位置．

$$a = k\sqrt{2D\epsilon} - (n-k)\sqrt{2D\epsilon} = (2k-n)\sqrt{2D\epsilon} =: m\sqrt{2D\epsilon},$$
$$k = \frac{n+m}{2}, \quad n-k = \frac{n-m}{2}.$$

そのようになる確率．

$$p(k) = {}_n\mathrm{C}_k \frac{1}{2^n} = \frac{n!}{[(n+m)/2]![(n-m)/2]!} \frac{1}{2^n}.$$

これから連続極限を考える．

$$n \to \infty, \quad \epsilon \to 0, \quad n\epsilon = t_n - t_0 \quad \text{fixed}.$$

(3/3) Wiener 過程（確率過程）

時刻 t_n に位置 $a \sim a + \Delta a$ にいる確率を考える．

$$a = k\sqrt{2D\epsilon} - (n-k)\sqrt{2D\epsilon} = (2k-n)\sqrt{2D\epsilon} =: m\sqrt{2D\epsilon}, \tag{1}$$

$$k = \frac{n+m}{2}, \quad n-k = \frac{n-m}{2}. \tag{2}$$

(2) より，n が偶数（奇数）なら m も偶数（奇数）である．
よって，m の間隔は 2 である．
(1) より，幅 Δa 中には到達しうる点は $\dfrac{\Delta a}{2\sqrt{2D\epsilon}}$ 個ある．
題意の確率．

$$p(a)\cdot\frac{\Delta a}{2\sqrt{2D\epsilon}} = \frac{n!}{[(n+m)/2]![(n-m)/2]!}\frac{1}{2^n}\frac{\Delta a}{2\sqrt{2D\epsilon}}.$$

Stirling の公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \quad (\,n \to \infty\,)$ より，

$$
\begin{aligned}
p(a)\cdot\frac{\Delta a}{2\sqrt{2D\epsilon}} &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\left(1+\frac{m}{n}\right)^{-(n+m)/2}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{-(n-m)/2}\frac{\Delta a}{2\sqrt{2D\epsilon}} \\
&= \frac{\Delta a}{\sqrt{4\pi D(t_n-t_0)}}\underbrace{\left(1+\frac{m}{n}\right)^{-(n+m)/2}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{-(n-m)/2}}_{(\mathrm{A})},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log(\mathrm{A}) &= -\frac{n+m}{2}\log\left(1+\frac{m}{n}\right)-\frac{n-m}{2}\log\left(1-\frac{m}{n}\right) \\
&= -\frac{n+m}{2}\left[\frac{m}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}\right)^2+\cdots\right]+\frac{n-m}{2}\left[\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}\right)^2+\cdots\right] \\
&\sim -\frac{m^2}{2n} = -\frac{a^2}{4D(t_n-t_0)},
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad p(a)\cdot\frac{\Delta a}{2\sqrt{2D\epsilon}} \sim \frac{\Delta a}{\sqrt{4\pi D(t_n-t_0)}}\exp\left[-\frac{a^2}{4D(t_n-t_0)}\right].
$$

(3/3) Wiener 過程（確率過程）

確率過程

時間変化する確率変数 $X(t,\omega) = X_\omega(t) = X_t(\omega)$.

Wiener 過程

確率的（一次元）運動をする粒子で次を満たすものの確率過程.

- 時刻 t_0 にある決まった点 x_0 を出発する.
- 時刻 t に位置 $x \sim x + \mathrm{d}x$ に到達する遷移確率.

$$\mathscr{G}(t, x | t_0, x_0)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}\right] \mathrm{d}x.$$

時刻 t に区間 $[a, b]$ に到達する遷移確率.

$$\int_a^b \mathscr{G}(t, x | t_0, x_0)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)}} \int_a^b \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}\right] \mathrm{d}x.$$

(3/3) Wiener 過程（確率過程）

Chapman-Kolmogorov 方程式

$$\mathscr{G}(t, x|t_0, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{G}(t, x|t', x')\mathscr{G}(t', x'|t_0, x_0)\mathrm{d}x' \quad (\ t_0 < t' < t\ ).$$

右辺：途中時刻 t' におけるすべての位置 x' についての和（積分）.

時刻 t_1 に位置 $x_1 \sim x_1 + \mathrm{d}x_1$，時刻 t_2 に位置 $x_2 \sim x_2 + \mathrm{d}x_2$，. . . ，
時刻 t_n に位置 $x_n + \mathrm{d}x_n$ にいる確率 ($t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$).

$$\mathscr{G}(t_n, x_n|\cdots|t_1, x_1|t_0, x_0)\mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_1,$$

$$\mathscr{G}(t_n, x_n|\cdots|t_1, x_1|t_0, x_0) = \prod_{k=1}^{n} \mathscr{G}(t_k, x_k|t_{k-1}, x_{k-1}).$$

(3/3) Wiener 過程（確率過程）

確率過程

時間的に変化する確率変数 $X(t,\omega) = X_t(\omega) = X_\omega(t)$.

Wiener 過程は確率過程のひとつ.

Wiener 過程 $X(t,\omega)$ のベースとなる確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ をこれから構成する.

- Ω : 見本経路 ω の空間.

$$\Omega = \mathbb{R}^{[t_0,\infty)} = \{\text{ 関数 } [t_0,\infty) \to \mathbb{R} \}.$$

  各 $\omega \in \Omega$ が経路 $X(t,\omega)$ を与える.

- $\mathfrak{B}$: 事象空間（σ-加法族）.
- $P : \mathfrak{B} \to [0,1]$, $P(B)$ ($B \in \mathfrak{B}$) は事象 B の起こる確率.

(3/3) Wiener 過程：確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ の構成

事象空間 $\mathfrak{B}$.

- 見本経路の空間 Ω の部分集合からなる集合族.
- σ-加法族である.
  - $\Omega, \emptyset \in \mathfrak{B}$.
  - $B \in \mathfrak{B} \;\Rightarrow\; B^c \in \mathfrak{B}$.
  - $B_1, B_2, \ldots \in \mathfrak{B} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{B}$.

確率 P.

- $0 \leq P(B) \leq 1 \quad (\, \forall B \in \mathfrak{B} \,)$.
- $P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$.
- 完全加法性.

$$B_1, B_2, \ldots \in \mathfrak{B},\ B_m \cap B_n = \emptyset\,(m \neq n) \;\Rightarrow\; P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n).$$

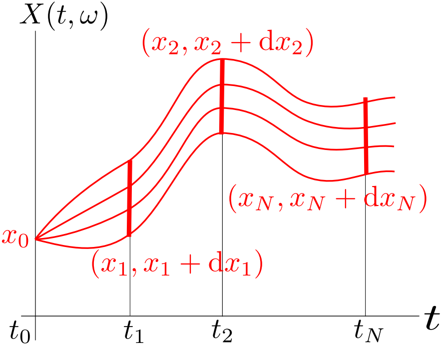
(3/3) Wiener 過程：確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ の構成

事象空間 $\mathfrak{B}$：経路の束からつくる．

$\theta = \{\, t_1, t_2, \ldots, t_N \,\}$：時刻の列 ($t_1 < t_2 < \cdots < t_N$)（有限個）．

柱状集合　$\Phi_\theta\left((x_1, x_1 + \mathrm{d}x_1) \times \ldots \times (x_N, x_N + \mathrm{d}x_N)\right)$

$:= \{\, \omega \in \Omega \mid X(t_1, \omega) \in (x_1, x_1 + \mathrm{d}x_1), \ldots, X(t_N, \omega) \in (x_N, x_N + \mathrm{d}x_N) \,\}$.



(3/3) Wiener 過程：確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ の構成

一般化：Borel 集合 $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ に対し，

$$\text{柱状集合} \quad \Phi_\theta(A) := \{ \omega \in \Omega \mid (X(t_1,\omega), \ldots, X(t_N,\omega)) \in A \}.$$

$$\mathfrak{F}_\theta := \left\{ \Phi_\theta(A) \;\middle|\; A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N) \right\} \quad \ldots \text{これは } \sigma\text{-加法族である.}$$

$$\mathfrak{F} := \bigcup_\theta \mathfrak{F}_\theta \quad \ldots \text{これは有限加法族だが } \sigma\text{-加法族ではない.}$$

$\because$ 可算無限個の時刻 $t_1 < t_2 < \cdots$，Borel 集合 $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ を用いて

$$\theta_N = \{ t_1, \ldots, t_N \}, \quad \Phi_{\theta_N}(A_1 \times \cdots \times A_N) \in \mathfrak{F}_{\theta_N}$$

を考えると，

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} \Phi_{\theta_N}(A_1 \times \cdots \times A_N)$$

は無限個の拘束時刻 $t_1, t_2, \ldots$ を持つので，$\mathfrak{F}$ に属さない.

(3/3) Wiener 過程：確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ の構成

$\mathfrak{F}$ が生成する（$\mathfrak{F}$ を含む最小の）σ-加法族を事象空間 $\mathfrak{B}$ とする．

$$\mathfrak{B} := \sigma[\mathfrak{F}] = \bigcap \{\, \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ は } \sigma\text{-加法族}, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{F} \,\}$$

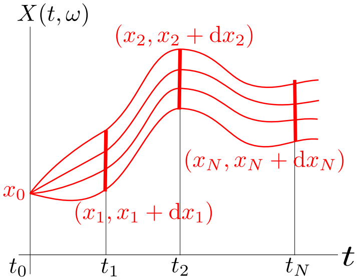
- $\mathfrak{F}$ を含む σ-加法族として 2^{Ω}（Ω の部分集合全体）が存在するから，右辺は意味を持つ．
- 数学の都合から上のように σ-加法族 $\mathfrak{B}$ を導入したのであり，実用上は一般の $\mathfrak{B}$ の集合（事象）がどういう形なのか思い悩む必要はない．
  実際には，最初に導入した拘束時刻つきの経路の束
  $$\Phi_{\theta}((x_1, x_1 + \mathrm{d}x_1), \ldots, (x_N, x_N + \mathrm{d}x_N)) \quad (\, \theta = \{\, t_1, \ldots, t_N \,\}\,)$$
  を事象として思い浮かべればよい．

確率 $P : \mathfrak{B} \to [0,1]$ を構成する．

1° 柱状集合 $\Phi_\theta(A)$ ($\theta = \{ t_1, \dots, t_N \}$. $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$) の確率
（$(X(t_1,\omega),\dots,X(t_N,\omega)) \in A$ なる経路 $X(t,\omega)$ をとる確率）.

$$P_\theta(\Phi_\theta(A)) := \int \cdots \int_A \mathscr{G}(t_N, x_N | \cdots | t_1, x_1 | t_0, x_0) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N,$$

$$\mathscr{G}(t_N, x_N | \cdots | t_1, x_1 | t_0, x_0) = \prod_{k=1}^{N} \mathscr{G}(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}).$$



柱状集合 $\Phi_\theta(A)$ ($A = (x_1, x_1 + \mathrm{d}x_1) \times \cdots \times (x_N, x_N + \mathrm{d}x_N)$).

(3/3) Wiener 過程：確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ の構成

確率 $P : \mathfrak{B} \to [0,1]$ を構成する．

1°　柱状集合 $\Phi_\theta(A)$ ($\theta = \{ t_1, \ldots, t_N \}$. $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$) の確率
（$(X(t_1,\omega), \ldots, X(t_N,\omega)) \in A$ なる経路 $X(t,\omega)$ をとる確率）.

$$P_\theta(\Phi_\theta(A)) := \int \cdots \int_A \mathscr{G}(t_N, x_N | \cdots | t_1, x_1 | t_0, x_0) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N,$$

$$\mathscr{G}(t_N, x_N | \cdots | t_1, x_1 | t_0, x_0) = \prod_{k=1}^{N} \mathscr{G}(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}).$$

とくに,

$$P_\theta(\Phi_\theta((a_1, b_1) \times \cdots \times (a_N, b_N)))$$
$$= \int_{a_N}^{b_N} \cdots \int_{a_1}^{b_1} \mathscr{G}(t_N, x_N | \cdots | t_1, x_1 | t_0, x_0) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N,$$

2° $\quad \mathfrak{F} = \bigcup_{\theta} \mathfrak{F}_\theta$ 上の確率 P_0： $\quad P_0(\Phi_\theta(A)) := P_\theta(\Phi_\theta(A))$.

（問題）異なる θ, θ' に対して，$\Phi_\theta(A), \Phi_{\theta'}(A')$ の和集合・共通部分などをどうやって定義するか？

$\theta = \{\, t_1, \ldots, t_N \,\}$, $\theta' = \{\, t_1', \ldots t_{N'}' \,\}$ に対し，

$$\theta \vee \theta' := \{\, t_1, \ldots, t_N, t_1', \ldots, t_{N'}' \text{ を時間順に並べ直したもの} \,\}.$$

$\theta \vee \theta' = \{\, t_1'', \ldots, t_L'' \,\}$ とすると，一般には $L \leq N + N'$
（t_i, t_j' の中に同じものがあることがあるから）.
そして，次の同一視を行う.

$$\Phi_\theta(A) = \Phi_{\theta \vee \theta'}(A \times \mathbb{R}^{N-L}),$$
$$\Phi_{\theta'}(A') = \Phi_{\theta \vee \theta'}(A' \times \mathbb{R}^{N'-L}).$$

こうすれば，$\Phi_\theta(A) \cap \Phi_{\theta'}(A')$, $\Phi_\theta(A) \cap \Phi_{\theta'}(A')$ が定義できる.

2° $\mathfrak{F} = \bigcup_{\theta} \mathfrak{F}_\theta$ 上の確率 P_0： $P_0(\Phi_\theta(A)) := P_\theta(\Phi_\theta(A))$.

（問題）異なる θ, θ' に対して，$\Phi_\theta(A), \Phi_{\theta'}(A')$ の和集合・共通部分などをどうやって定義するか？

例：$\theta = \{\, t_1, t_2, t_3 \,\}$, $\theta' = \{\, t_1, t_2, t_4 \,\}$ ($t_1 < t_2 < t_3 < t_4$).

$$
\begin{aligned}
\theta \vee \theta' &= \{\, t_1, t_2, t_3, t_4 \,\}, \\
\Phi_\theta(A) &= \Phi_{\theta\vee\theta'}(A \times \mathbb{R}) \\
&= \{\, \omega \in \Omega \mid (X(t_1,\omega), X(t_2,\omega), X(t_3,\omega)) \in A \,\&\, X(t_4,\omega) \in \mathbb{R} \,\}, \\
\Phi_{\theta'}(A') &= \Phi_{\theta\vee\theta'}(A' \times \mathbb{R}) \\
&= \{\, \omega \in \Omega \mid (X(t_1,\omega), X(t_2,\omega), X(t_4,\omega) \in A' \,\&\, X(t_3,\omega) \in \mathbb{R} \,\}.
\end{aligned}
$$

(3/3) Wiener 過程：確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ の構成

先程の同一視を行うと，P_0 は次の整合性を満たす.

$$P_0(\Phi_\theta(A)) = P_\theta(\Phi_\theta(A)) = P_{\theta\vee\theta'}(\Phi_{\theta\vee\theta'}(A \times \mathbb{R}^{N-L})).$$

先程の同一視によって矛盾は生じない.

$$\because \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{G}(\cdots|t_{k+1}, x_{k+1}|t_k, x_k|t_{k-1}, x_{k-1}|\cdots)\mathrm{d}x_k = \mathscr{G}(\cdots|t_{k+1}, x_{k+1}|t_{k-1}, x_{k-1}|\cdots).$$

こうして，有限加法族 $\mathfrak{F} = \bigcup_\theta \mathfrak{F}_\theta$ の上に確率 P_0 が well-defined に定義された.

3° あとは P_0 を σ-加法族 $\mathfrak{B} = \sigma[\mathfrak{F}]$ 上の確率 P に拡張するだけである. これは「Kolmogorov の拡張定理」により可能であることが知られている.

以上により，所望の確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ を構成することができた.

まとめ

試行をたくさん繰り返すと…

- 大数の法則.

  1 回の試行ではわからない確率が，試行の繰り返しにより
  わかってくる.

$$\text{事象 } E \text{ の実現回数の割合} \simeq \text{事象 } E \text{ の確率.}$$

- 中心極限定理.

  たくさん試行を繰り返すと，試行結果の和は正規分布に近づく.

- Wiener 過程：Brown 運動の数学的モデル，酔歩モデルから構成（これもたくさんの試行の繰り返し）.
- Wiener 過程（確率過程）のベースとなる確率空間の構成.