Brown 運動の数学
確率過程・確率解析（３）

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 8 月 14 日（土）

今回の内容

Langevin 方程式：Brown 運動粒子の運動方程式.

確率変数の微積分計算をしなければならない.

1. Langevin 方程式.
   確率積分を考える動機づけ.
2. 確率積分（伊藤 * 積分）.
$$\int_0^t f(s, B_s)\mathrm{d}B_s.$$
3. 伊藤 * の公式.
   確率の微積分における基礎公式．確率過程の Taylor 展開.
4. マルチンゲール.
   公平なギャンブル．確率過程における「公平さ」.

* 伊藤清 (1915–2008)

(1/4)Langevin 方程式

Wiener 過程 $B_t = B(t,\omega)$

基本的な Brown 運動の数学モデルである確率過程.

- （初期条件）時刻 $t=0$ に原点を出発：$B(0,\omega)=0$.
- $(t',x') \to (t, x \sim x+\mathrm{d}x)$ の遷移確率.

$$\mathscr{G}(t,x|t',x')\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t')}}\exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4D(t-t')}\right)\mathrm{d}x$$

$$(\ D>0\ \text{：拡散係数}\ ).$$

- $E(B_t)=0, \quad V(B_t)=E(B_t^2)=2Dt.$
- 異なる時間における変位

$$B(t,\omega)-B(t',\omega),\quad B(s,\omega)-B(s',\omega)\quad (\ t>t'\geq s>s'\ )$$

は独立である.

Langevin 方程式：Brown 運動粒子の速度 v に対する微分方程式.

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\mu v + R(t),$$

$M > 0$ ： 質量,　$\mu > 0$ ： 動摩擦係数,

$R(t)$ ： 揺動力（確率的な力）.

揺動力

平均　$\langle R(t) \rangle = 0,$

共分散　$\langle R(t)R(t') \rangle = c\delta(t - t')$　($c > 0$ ： const.).

Wiener 過程の共分散.

$$\begin{aligned}\langle B(t)B(t')\rangle &= 2D\min\{t,t'\}\\ &= 2D\left\{t'\theta(t-t')+t\theta(t'-t)\right\},\end{aligned}$$

$$\theta(t) := \begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}\quad \text{Heaviside の階段関数.}$$

$\because$ $t > t'$ とする.

$$\begin{aligned}\langle B(t)B(t')\rangle &= \langle\{(B(t)-B(t')+B(t')\}B(t')\rangle\\ &= \langle(B(t)-B(t'))B(t')\rangle + \langle B(t')^2\rangle\\ &\quad (B(t)-B(t') \text{ と } B(t') \text{ は独立})\\ &= \langle B(t)-B(t')\rangle\underbrace{\langle B(t')\rangle}_{0}+\langle B(t')^2\rangle = 2Dt'.\end{aligned}$$

■

(1/4)Langevin 方程式

$$\langle B(t)B(t')\rangle = 2D\{t'\theta(t-t') + t\theta(t'-t)\}.$$

両辺を t, t' で微分する． $\dot{\theta}(t) = \delta(t)$ を用いて，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t'}\langle B(t)B(t')\rangle &= 2D\left\{\theta(t-t') - t'\delta(t-t') + t\delta(t'-t)\right\}, \\
&= 2D\theta(t-t'), \\
\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}\langle B(t)B(t')\rangle &= 2D\delta(t-t').
\end{aligned}$$

(1/4)Langevin 方程式

$$\langle B(t)B(t')\rangle = 2D\{t'\theta(t-t') + t\theta(t'-t)\}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}\langle B(t)B(t')\rangle = 2D\delta(t-t').$$

(1/4)Langevin 方程式

$$\langle B(t)B(t')\rangle = 2D\{t'\theta(t-t') + t\theta(t'-t)\}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}\langle B(t)B(t')\rangle = 2D\delta(t-t').$$

一方，Langevin 方程式の揺動力 $R(t)$ は次を満たす．

$$\langle R(t)R(t')\rangle = c\delta(t-t') \quad (\, c \;:\; \text{const.}\,).$$

だから，次のようにしたくなる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}\langle B(t)B(t')\rangle = \left\langle \frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}B(t')}{\mathrm{d}t'}\right\rangle \quad ?,$$

$$R(t) = \frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}, \quad c = 2D \quad ?.$$

(1/4)Langevin 方程式

$$\text{揺動力}\quad R(t,\omega) = \frac{\mathrm{d}B(t,\omega)}{\mathrm{d}t}\quad ?$$

しかし，Wiener 過程の見本経路 $B(t,\omega)$ は t について微分可能でないことがわかっている．

$$\text{Langevin 方程式}\quad M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\mu v + \frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}\quad ?$$

代わりに次の形の方程式を考えるべき．

$$M\mathrm{d}v = -\mu v\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t \quad \text{確率微分方程式.}$$

(1/4)Langevin 方程式

$$\text{揺動力}\quad R(t,\omega) = \frac{\mathrm{d}B(t,\omega)}{\mathrm{d}t} \quad ?$$

しかし，Wiener 過程の見本経路 $B(t,\omega)$ は t について微分可能でないことがわかっている．

$$\text{Langevin 方程式}\quad M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\mu v + \frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t} \quad ?$$

代わりに次の形の方程式を考えるべき．

$$M\mathrm{d}v = -\mu v\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t \quad \text{確率微分方程式.}$$

確率過程の微積分が必要になる．

(2/4) 確率積分

Langevin 方程式

$$\mathrm{d}v = -\mu_0 v \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t.$$

B_t が普通の t の関数ならば，解は

$$v(t) = v_0 \mathrm{e}^{-\mu_0 t} + \int_0^t \mathrm{e}^{-\mu_0 (t-s)} \mathrm{d}B_s.$$

B_t が確率過程（Wiener 過程）を表すとき，
右辺第 2 項の積分（確率過程の積分）はどう定義するのか？

B_t が有界変動ならば Stieltjes 積分で定義できるが，そうではない．

$$M_{\Delta_n}(\omega) := \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta B_{t_k}| \to \infty \quad (\, \|\Delta_n\| \to 0\,),$$

$$\Delta_n \ :\ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t,$$

$$\|\Delta_n\| = \max_{0 \le k \le n-1} |t_{k+1} - t_k|, \quad \Delta B_{t_k} = B_{t_{k+1}} - B_{t_k}.$$

(2/4) 確率積分

Stieltjes 積分を与える離散和

$$I_{\Delta_n}(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k, \omega)\Delta B(t_k, \omega), \quad t_k \leq \tau_k \leq t_{k+1}.$$

τ_k のとり方により $I_{\Delta_n}(\omega)$ が変わってしまう．
とくに $f(t,\omega) = B(t,\omega)$ の場合，

$$I_1(\omega) := \sum_{k=0}^{n-1} B(t_k, \omega)\Delta B(t_k, \omega), \quad I_2(\omega) := \sum_{k=0}^{n-1} B(t_{k+1}, \omega)\Delta B(t_k, \omega).$$

$$E(I_1) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{E(B(t_k,\omega))}_{0} E(\Delta B(t_k, \omega)) = 0$$

（$B(t_k,\omega)$ と $\Delta B(t_k,\omega) = B(t_{k+1},\omega) - B(t_k,\omega)$ は独立である），

$$E(I_2) = \sum_{k=0}^{n-1} E\left(\{\Delta B(t_k,\omega)\}^2 + B(t_k,\omega)\Delta B(t_k,\omega)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} 2D\Delta t_k + \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{E(B(t_k,\omega))}_{0} E(\Delta B(t_k,\omega)) = 2Dt.$$

(2/4) 確率積分

伊藤積分

$$\int_0^t f(t,\omega)\mathrm{d}B_t := \lim_{\|\Delta_n\|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k,\omega)\Delta B(t_k,\omega),$$

$$\Delta_n \ : \ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t, \quad \|\Delta_n\| := \max_{0\le k\le n-1} |t_{k+1} - t_k|,$$

$$\Delta B(t_k,\omega) = B(t_{k+1},\omega) - B(t_k,\omega).$$

$\mathrm{d}B_t$ は前進差分をとる.

- $\displaystyle\int_0^t f(t,\omega)\mathrm{d}B_t$ は確率変数である.
- 確率変数の収束は「2 次の平均収束」.

  i.e,. $X_n(\omega) \to Y(\omega)$ ($n \to \infty$) は次の意味：

$$E\left([X_n(\omega) - Y(\omega)]^2 \right) = \int_\Omega [X_n(\omega) - Y(\omega)]^2 P(\mathrm{d}\omega) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

$*$ 確率積分には他に「Stratonovich 積分」もある.

(2/4) 確率積分

これからしばらく確率積分の計算練習をする.

伊藤の等長性

$$E\left(\left\{\int_0^t f(\tau,\omega)\mathrm{d}B_\tau\right\}^2\right) = 2DE\left(\int_0^t f(\tau,\omega)^2\mathrm{d}\tau\right).$$

(2/4) 確率積分

（証明）積分を与える離散和から始める．

$$E\left(\left\{\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k,\omega)\Delta B_{t_k}\right\}^2\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E\left(\{f(t_k,\omega)\Delta B_{t_k}\}^2\right) + 2\sum_{i<j} E\left(f(t_i,\omega)f(t_j,\omega)\Delta B_{t_i}\Delta B_{t_j}\right), \qquad (1)$$

第 1 項：$f(t_k,\omega)$ と $\Delta B_{t_k} = B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$ は独立
第 2 項：$f(t_i,\omega)f(t_j,\omega)\Delta B_{t_i}$ と ΔB_{t_j} は独立
（$f(t,\omega)$ と $B(s,\omega) - B(s',\omega)$ ($s > s' > t$) は独立とする）.

$$(1) = \sum_{k=0}^{n-1} E(f(t_k,\omega)^2)\underbrace{E((\Delta B_{t_k})^2)}_{2D\Delta t_k} + 2\sum_{i<j} E(f(t_i,\omega)f(t_j,\omega)\Delta B_{t_i})\underbrace{E(\Delta B_{t_j})}_{0}$$

$$= 2DE\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k,\omega)^2\Delta t_k\right) \xrightarrow{(a)} 2DE\left(\int_0^t f(\tau,\omega)^2 \mathrm{d}\tau\right) \quad (\ n\to\infty\ ).$$

最後の (a) は「補遺」参照. ■

(2/4) 確率積分：計算例 1

$$\int_0^t B_s \mathrm{d}B_s = \frac{1}{2}B_t(\omega)^2 - Dt.$$

（証明）

$$\int_0^t B_s \mathrm{d}B_s = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k}\Delta B_{t_k}.$$

右辺の和を計算する．

$$\Delta(B_{t_k}^2) = (B_{t_k} + \Delta B_{t_k})^2 - B_{t_k}^2 = 2B_{t_k}\Delta B_{t_k} + (\Delta B_{t_k})^2,$$

$$B_{t_k}\Delta B_{t_k} = \frac{1}{2}\Delta(B_{t_k}^2) - \frac{1}{2}(\Delta B_{t_k})^2$$

により，

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k}\Delta B_{t_k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta(B_{t_k}^2) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta B_{t_k})^2 = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta B_{t_k})^2.$$

$n\to\infty$ とすると $\sum(\Delta B_{t_k})^2 \to 2Dt$ （2 次平均収束，補遺参照）であるから，

$$\int_0^t B_s \mathrm{d}B_s = \frac{1}{2}B_t^2 - Dt.$$

(2/4) 確率積分：計算例 2

$$\int_0^t s\mathrm{d}B_s = tB_t - \int_0^t B_s \mathrm{d}s \quad \text{（右辺は「部分積分」）.}$$

（証明）確率積分の定義より，

$$\int_0^t s\mathrm{d}B_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} t_k \Delta B_{t_k}.$$

右辺の和を

$$\Delta(t_k B_{t_k}) = B_{t_{k+1}} \Delta t_k + t_k \Delta B_{t_k}$$

を用いて計算して，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} t_k \Delta B_{t_k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \Delta(t_k B_{t_k}) - \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_{k+1}} \Delta t_k \\
&= tB_t - \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_{k+1}} \Delta t_k \to tB_t - \int_0^t B_s \mathrm{d}s \quad (\, n \to \infty \,).
\end{aligned}$$

■

(3/4) 伊藤の公式

確率過程の計算を微積分のように機械的に行うための公式を用意する．
まず，言葉の定義．

伊藤過程

次で与えられる確率過程 X_t．

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)\mathrm{d}s + \int_0^t v(s,\omega)\mathrm{d}B_s,$$

または，

$$\mathrm{d}X_t = u(t,\omega)\mathrm{d}t + v(t,\omega)\mathrm{d}B_t \quad \text{（微分形）}.$$

(3/4) 伊藤の公式

伊藤の公式：確率過程に対する「Taylor 展開」

- X_t ：伊藤過程 ($\mathrm{d}X_t = u(t,\omega)\mathrm{d}t + v(t,\omega)\mathrm{d}B_t$).
- Y_t ：X_t を用いて次で与えられる確率過程.

$$Y_t = f(t, X_t),$$

$f(t,x)$ ： t,x について 2 回微分可能，導関数も連続.

このとき，次式が成り立つ.

$$\mathrm{d}Y_t = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{x=X_t}\mathrm{d}t + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=X_t}\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=X_t}(\mathrm{d}X_t)^2,$$

ここで，$(\mathrm{d}X_t)^2 = \mathrm{d}X_t\mathrm{d}X_t$ は次の演算規則で計算する.

$$\mathrm{d}t\mathrm{d}t = 0, \quad \mathrm{d}t\mathrm{d}B_t = 0, \quad \mathrm{d}B_t\mathrm{d}B_t = 2D\mathrm{d}t,$$

すなわち，

$$\mathrm{d}B_t\mathrm{d}B_t = 2Dv(t,\omega)^2\mathrm{d}t.$$

(3/4) 伊藤の公式

とくに，$Y_t = f(t, B_t)$ の場合，

$$\mathrm{d}Y_t = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{x=B_t} \mathrm{d}t + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=B_t} \mathrm{d}B_t + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=B_t} \underbrace{(\mathrm{d}B_t)^2}_{2D\mathrm{d}t}$$

$$= \left.\left(\frac{\partial f}{\partial t} + D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\right|_{x=B_t} \mathrm{d}t + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=B_t} \mathrm{d}B_t.$$

- $\mathrm{d}B_t$ は 0.5 次の微小量.
- $(\mathrm{d}B_t)^2 = 2D\mathrm{d}t +$（高次の微小量）.
- 通常の全微分 $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x$ と違う点.

  x については Taylor 展開の 2 次の項までとる.

(3/4) 伊藤の公式：計算例 1

先程の確率積分の計算を，今度は伊藤の公式を用いてやってみる．

1. $Y_t = \frac{1}{2}B_t^2 \left(f(t,x) = \frac{1}{2}x^2 \right).$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 1.$$

伊藤の公式より

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(B_t^2) = B_t \mathrm{d}B_t + \frac{1}{2}\underbrace{(\mathrm{d}B_t)^2}_{2D\mathrm{d}t} = B_t \mathrm{d}B_t + D\mathrm{d}t,$$

$$\therefore \quad \int_0^t B_s \mathrm{d}B_s = \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{d}(B_s^2) - D\int_0^t \mathrm{d}s = \frac{1}{2}B_t^2 - Dt.$$

2. $Y_t = tB_t \; (\; f(t,x) = tx \;).$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = t, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

伊藤の公式より

$$\mathrm{d}(tB_t) = B_t \mathrm{d}t + t\mathrm{d}B_t,$$

$$\therefore \quad \int_0^t s\mathrm{d}B_s = \int_0^t \mathrm{d}(sB_s) - \int_0^t B_s \mathrm{d}s = tB_t - \int_0^t B_s \mathrm{d}s.$$

（一般化）$Y_t = g(t)B_t \; (\; f(t,x) = g(t)x \;)$. 伊藤の公式より

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(g(t)B_t) &= \dot{g}(t)B_t \mathrm{d}t + g(t)\mathrm{d}B_t \\ &= B_t \mathrm{d}g(t) + g(t)\mathrm{d}B_t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \int_0^t g(s)\mathrm{d}B_s &= \int_0^t \mathrm{d}(g(s)B_s) - \int_0^t B_s \mathrm{d}g(s) \\ &= g(t)B_t - \int_0^t B_s \mathrm{d}g(s) \quad \text{（部分積分）}. \end{aligned}$$

3. $E(B_t^{2n}) = (2n-1)!!(2Dt)^n \quad (\, n = 1, 2, \ldots \,).$
（証明）直接計算では次のようになる．

$$E(B_t^{2n}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \mathrm{d}x = (2n-1)!!(2Dt)^n.$$

これを伊藤の公式で計算する．

$$Y_t = f(t, B_t), \quad f(t, x) = x^k$$

に伊藤の公式を適用して，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(B_t^k) &= kB_k^{k-1}\mathrm{d}B_k + \frac{1}{2}k(k-1)B_k^{k-2}(\mathrm{d}B_k)^2 \\ &= kB_k^{k-1}\mathrm{d}B_k + k(k-1)DB_t^{k-2}\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

$$B_t^k = k\int_0^t B_s^{k-1}\mathrm{d}B_s + k(k-1)D\int_0^t B_s^{k-2}\mathrm{d}s,$$

両辺の平均を取ると，B_s と $\mathrm{d}B_s$ は独立，$E(\mathrm{d}B_s) = 0$ より，

$$E(B_t^k) = k(k-1)D\int_0^t E(B_s^{k-2})\mathrm{d}s.$$

(3/4) 伊藤の公式：計算例３（続）

$$E(B_t^{2n}) = 2n(2n-1)D\int_0^t E(B_s^{2n-2})\mathrm{d}s.$$

これより，

$$E(B_t^{2n}) = (2n-1)!!(2Dt)^n$$

が帰納法により得られる．

$n=0$ の場合，両辺 $=1$ となって成立．

$n-1$ の場合に成立すると仮定すると，

$$\begin{aligned} E(B_t^{2n}) &= 2n(2n-1)D\cdot(2n-3)!!(2D)^{n-1}\int_0^t s^{n-1}\mathrm{d}s \\ &= (2n-1)(2n-3)!!(2Dt)^n = (2n-1)!!(2Dt)^n \end{aligned}$$

により，n の場合にも成立する． ■

(4/4) マルチンゲール

マルチンゲール (martingale)

ギャンブルで，負けるたびに次の掛け金を倍にする方法．
各回の勝ち負けの確率が同じ（公平なギャンブル）ならば，

- $n+1$ 回目の期待金額 $= n$ 回目の負け額．
- 最終的に勝った時，最初の掛け金分だけプラスになる．

公平なギャンブルだからこそ，こういうことが可能である．

1 回目に 1 ドル賭けるとする．

- 4 回目にはじめて勝つならば，
  - 3 回目までの負け額の合計：$1+2+2^2=7$ ドル．
  - 4 回目に $2^3=8$ ドル賭けて勝つ．
  - 結局，$8-7=1$ ドル勝つ（最初の賭け金と同額）．
- $n+1$ 回目にはじめて勝つならば，
  負け額の合計：$1+2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$ ドル．
  $n+1$ 回目に 2^n ドル勝って，結局 1 ドル勝つ．

確率過程論におけるマルチンゲールをこれから定義する.

（ギャンブル）$n+1$ 回目の期待金額 $= n$ 回目の負け額.

確率過程論におけるマルチンゲール

次を満たす確率過程 $X_t = X(t,\omega)$ をマルチンゲールとよぶ.

$$\text{時刻 } s \text{ における } X_t \text{ の期待値} = X_s \quad (\, t > s\,).$$

もっと数学的にちゃんと定義すると,

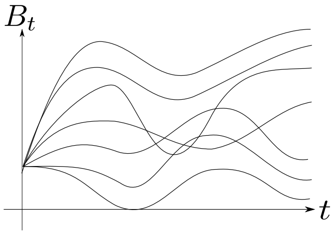
- 考えている確率空間 : $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ $\quad (\, \Omega = \mathbb{R}^{[0,\infty)}\,)$.
- $\mathfrak{B}_t$: 時間 $0 \sim t$ における経路から生成される事象空間（$\mathfrak{B}$ の部分 σ-加法族）.
- 条件付き期待値 $E(X_t|\mathfrak{B}_s) = X_s \quad (\, t > s\,)$.

これから，部分 σ-加法族 $\mathfrak{B}_t$ を（直感的に）定義する

確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$.

見本空間 Ω.

$$\begin{aligned}\Omega &= \mathbb{R}^{[0,\infty)} \\ &:= \{\text{関数 } [0,\infty) \to \mathbb{R}\} \\ &= \text{(経路全体からなる集合)}.\end{aligned}$$



Ω：経路全体からなる集合.

$*$ 記号 $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ について.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &= \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{\text{関数 } \{1,2\} \to \mathbb{R}\}, \\ \mathbb{R}^N &= \{(x_1, \ldots, x_N) \mid x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}\} = \{\text{関数 } \{1,\ldots,N\} \to \mathbb{R}\}, \\ \mathbb{R}^{[0,\infty)} &= \{\text{関数 } [0,\infty) \to \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

次に，Ω の部分集合族 $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_t$（$\sigma$-加法族）（と確率 P）を定める.

事象空間 $\mathfrak{B}$（σ-加法族）を直感的に導入する．

見本空間 Ω（経路全体）は「微小事象」$\Delta\Omega_\lambda$ の非交差和である．

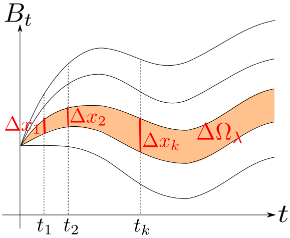
$$\Omega = \sum_{\lambda\in\Lambda} \Delta\Omega_\lambda, \quad \mathfrak{B} := \{\, \Delta\Omega_\lambda \text{ の和集合} \,\}.$$

微小事象 $\Delta\Omega_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$（ここだけの造語）．

- 時間軸を分割：$0 < t_1 < t_2 < \cdots$.
- 各時刻 $t_1, t_2, \ldots$ に微小区間

  $$[x_1, x_1 + \Delta x_1], [x_2, x_2 + \Delta x_2], \ldots$$

  を通過する経路 B_t の集合を $\Delta\Omega_\lambda$ とする．



- 微小事象 $\Delta\Omega_\lambda$ の確率．

$$P(\Delta\Omega_\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathscr{G}(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}) \Delta x_k,$$

$$\mathscr{G}(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_k - t_{k-1})}} \exp\left(-\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4D(t_k - t_{k-1})} \right).$$

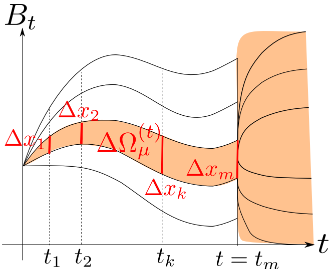
部分事象空間 $\mathfrak{B}_t \subset \mathfrak{B}$ （$0 < t < \infty$, 部分 σ-加法族）

$$\mathfrak{B}_t := \left\{ \Delta\Omega_\mu^{(t)} \text{ の和集合} \right\}.$$

微小事象 $\Delta\Omega_\mu^{(t)}$ ($\mu \in M$).

- 微小事象 $\Delta\Omega_\lambda$ のうち，時間 $0 \sim t$ の部分が同じであるものの和集合をとったもの．
- 微小事象 $\Delta\Omega_\mu^{(t)}$ の確率．

  $0 < t_1 < \cdots < t_m = t < t_{m+1} < \cdots$ とすれば，



$$P(\Delta\Omega_\mu^{(t)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_{m+1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_{m+2} \cdots \left\{ \prod_{k=1}^{\infty} \mathscr{G}(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}) \right\} \Delta x_1 \cdots \Delta x_m$$

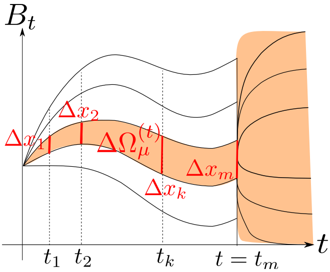
部分事象空間 $\mathfrak{B}_t \subset \mathfrak{B}$ （$0 < t < \infty$, 部分 σ-加法族）

$$\mathfrak{B}_t := \left\{ \Delta\Omega_\mu^{(t)} \text{ の和集合} \right\}.$$

微小事象 $\Delta\Omega_\mu^{(t)}$ ($\mu \in M$).

- 微小事象 $\Delta\Omega_\lambda$ のうち，時間 $0 \sim t$ の部分が同じであるものの和集合をとったもの.
- 微小事象 $\Delta\Omega_\mu^{(t)}$ の確率.

  $0 < t_1 < \cdots < t_m = t < t_{m+1} < \cdots$ とすれば,



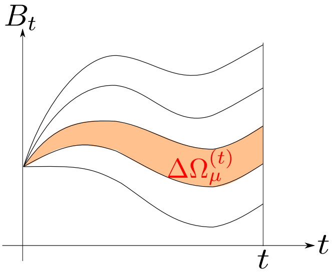
$$P(\Delta\Omega_\mu^{(t)}) = \left\{ \prod_{k=1}^{m} \mathscr{G}(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}) \right\} \Delta x_1 \cdots \Delta x_m$$

部分事象空間 $\mathfrak{B}_t \subset \mathfrak{B}$ （$0 < t < \infty$, 部分 σ-加法族）

$$\mathfrak{B}_t := \left\{ \Delta\Omega_\mu^{(t)} \text{ の和集合} \right\}.$$

微小事象 $\Delta\Omega_\mu^{(t)}$ ($\mu \in M$).

（Ω のうち時間 $0 \sim t$ の部分）
＝（時間 $0 \sim t$ の経路全体からなる集合）
$= \sum_{\mu \in M} \Delta\Omega_\mu^{(t)}$.



$$P(\Delta\Omega_\mu^{(t)}) = \left\{ \prod_{k=1}^{m} \mathscr{G}(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}) \right\} \Delta x_1 \cdots \Delta x_m.$$

(4/4) マルチンゲール：条件付き期待値

- $\mathfrak{B}$-可測関数
  各微小事象 $\Delta\Omega_\lambda$ 毎に値がひとつずつ与えられている関数 $\Omega \to \mathbb{R}$.
- $\mathfrak{B}_t$-可測関数
  各微小事象 $\Delta\Omega_\mu^{(t)}$ 毎に値がひとつずつ与えられている関数 $\Omega \to \mathbb{R}$.

確率変数 $X(\omega)$ の $\mathscr{B}_t$ に関する条件付き期待値

... 各微小事象 $\Delta\Omega_\mu^{(t)}$ 毎に次の値をとる確率変数（可測関数）

$$\begin{aligned} E(X|\mathfrak{B}_t)(\omega) &:= E(X|\Delta\Omega_\mu^{(t)}) \\ &= \frac{1}{P(\Delta\Omega_\mu^{(t)})} \int_{\Delta\Omega_\mu^{(t)}} X(\omega) P(\mathrm{d}\omega) \quad \text{if } \omega \in \Delta\Omega_\mu^{(t)}. \end{aligned}$$

1. $E(E(X|\mathfrak{B}_t)) = E(X)$.
2. Y が $\mathfrak{B}_t$-可測なら $E(YX|\mathfrak{B}_t) = YE(X|\mathfrak{B}_t)$.

1.

$$E(E(X|\mathfrak{B}_t)) = \sum_{\mu\in M} P(\Delta\Omega_\mu^{(t)})E(X|\Delta\Omega_\mu^{(t)})$$
$$= \sum_{\mu\in M}\int_{\Delta\Omega_\mu^{(t)}} X(\omega)P(\mathrm{d}\omega) = \int_\Omega X(\omega)P(\mathrm{d}\omega) = E(X).$$

2. 各 $\Delta\Omega_\mu^{(t)}$ 上で $E(YX|\mathfrak{B}_t)(\omega) = Y(\omega)E(X|\Delta\Omega_\mu^{(t)})$ を示せばよい.
各 $\Delta\Omega_\mu^{(t)}$ 上で $Y(\omega) \equiv Y_\mu$ (const.) であるから，$\omega \in \Delta\Omega_\mu^{(t)}$ のとき

$$E(YX|\mathfrak{B}_t)(\omega) = E(YX|\Delta\Omega_\mu^{(t)})$$
$$= \frac{1}{P(\Delta\Omega_\mu^{(t)})}\int_{\Delta\Omega_\mu^{(t)}} Y(\omega)X(\omega)P(\mathrm{d}\omega)$$
$$= \frac{Y_\mu}{P(\Delta\Omega_\mu^{(t)})}\int_{\Delta\Omega_\mu^{(t)}} X(\omega)P(\mathrm{d}\omega) = Y(\omega)E(X|\Delta\Omega_\mu^{(t)}).$$

(4/4) マルチンゲール

マルチンゲール

確率過程 X_t はマルチンゲールである.

$$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad E(X_t|\mathfrak{B}_s) = X_s \quad (\ s < t\ ).$$

$$\text{i.e.,} \quad E(X_t|\Delta\Omega_\mu^{(s)}) = X_s(\omega) \quad \text{if } \omega \in \Delta\Omega_\mu^{(s)} \quad (\ \mu \in M\ ).$$

時刻 s で確率過程 X の未来の時刻 t における期待値を求めたら,
現在（時刻 s）の確率過程 X の値に等しくなる.

(4/4) マルチンゲール

Wiener 過程 B_t はマルチンゲールである.

時間 $0 \sim s \sim t$ を $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = s < t_{m+1} < \cdots < t_n = t$ と分割する.

$$E(B_t|\mathfrak{B}_s) = \underbrace{E\left(\sum_{k=0}^{m-1} \Delta B_{t_k} \middle| \mathfrak{B}_s\right)}_{\text{各 } \Delta B_{t_k} \text{ は } \mathfrak{B}_s \text{ 可測}} + \underbrace{E\left(\sum_{k=m}^{n-1} \Delta B_{t_k} \middle| \mathfrak{B}_s\right)}_{\text{各 } \mathfrak{B}_{t_k} \subset \mathfrak{B}_s \text{ より}}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \Delta B_{t_k} + \sum_{k=m}^{n-1} E\left(E\left(\Delta B_{t_k} | \mathfrak{B}_{t_k}\right) | \mathfrak{B}_s\right)$$

（ΔB_{t_k} は $\mathfrak{B}_{t_k}$ の事象と独立であるから）

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \Delta B_{t_k} + \sum_{k=m}^{n-1} E(\underbrace{E(\Delta B_{t_k})}_{0} | \mathfrak{B}_s)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \Delta B_{t_k} = B_s.$$

(4/4) マルチンゲール

定理

伊藤積分で与えられる確率過程

$$X_t(\omega) = \int_0^t u(s,\omega)\mathrm{d}B_s$$

はマルチンゲールである：

$$E(X_t|\mathfrak{B}_s) = X_s \quad (\ s < t\ ).$$

ただし，$u(t,\omega)$ は次の条件を満たすと仮定する．

- $u(t,\omega)$ は (t,ω) の関数として $\sigma[[0,\infty)] \times \mathfrak{B}$-可測である．
- すべての $t > 0$ に対し $u(t,\omega)$ は ω の関数として $\mathfrak{B}_t$-可測である．
  $u(t,\omega)$ は確率変数として過去の出来事にしか依存しない．
- $$E\left(\int_0^T u(t,\omega)^2\mathrm{d}t\right) < \infty \quad (\ \forall T > 0\ ).$$

(4/4) マルチンゲール

（証明）時間 $0 \sim s \sim t$ を $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = s < t_{m+1} < \cdots < t_n = s$ と分割する.

$$X_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u(t_k,\omega)\Delta B_{t_k}(\omega).$$

$$E\left(\sum_{k=0}^{n-1} u(t_k,\omega)\Delta B_{t_k}(\omega) \middle| \mathfrak{B}_s\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} E(u(t_k,\omega)\Delta B_{t_k}(\omega)|\mathfrak{B}_s) + \sum_{k=m}^{n-1} E(u(t_k,\omega)\Delta B_{t_k}(\omega)|\mathfrak{B}_s)$$

（$u(t_k,\omega)\Delta B_{t_k}(\omega)$ は $\mathfrak{B}_s$-可測であるから）

$$= \sum_{k=0}^{m-1} u(t_k,\omega)\Delta B_{t_k}(\omega) + \sum_{k=m}^{n-1} E(E(u(t_k,\omega)\Delta B_{t_k}(\omega)|\mathfrak{B}_{t_k})|\mathfrak{B}_s)$$

（$u(t_k,\omega)$ と $\Delta B_{t_k}(\omega)$ は独立だから）

$$= \sum_{k=0}^{m-1} u(t_k,\omega)\Delta B_{t_k}(\omega) + \sum_{k=m}^{n-1} E(E(u(t_k,\omega)|\mathfrak{B}_{t_k})\underbrace{E(\Delta B_{t_k}(\omega)|\mathfrak{B}_{t_k})}_{0}|\mathfrak{B}_s).$$

(4/4) マルチンゲール

（証明）時間 $0 \sim s \sim t$ を $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = s < t_{m+1} < \cdots < t_n = s$ と分割する．

$$X_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u(t_k, \omega)\Delta B_{t_k}(\omega).$$

$$E\left(\sum_{k=0}^{n-1} u(t_k, \omega)\Delta B_{t_k}(\omega) \middle| \mathfrak{B}_s \right) = \sum_{k=0}^{m-1} u(t_k, \omega)\Delta B_{t_k}(\omega).$$

$n \to \infty$ として，

$$E(X_t(\omega)|\mathfrak{B}_s) = \int_0^s u(\tau, \omega)\mathrm{d}B_\tau = X_s(\omega)$$

を得る． ■

(4/4) マルチンゲール

いまの定理の逆も成立する.

マルチンゲール表現定理

- $X_t(\omega)$ はマルチンゲールである.
- $X_t \in L^2(\Omega, P)$ ($\forall t > 0$).

このとき, $X_t(\omega)$ は次の伊藤積分で表される.

$$X_t(\omega) = E(X_0) + \int_0^t u(s,\omega)\mathrm{d}B_s.$$

ここで $u(t,\omega)$ は次を満たす関数である.

- $u(t,\omega)$ は (t,ω) の関数として $\sigma[[0,\infty)] \times \mathfrak{B}$-可測である.
- すべての $t > 0$ に対し $u(t,\omega)$ は ω の関数として $\mathfrak{B}_t$-可測である.
- $$E\left(\int_0^T u(t,\omega)^2 \mathrm{d}t\right) < \infty \quad (\forall T > 0).$$

まとめ

Brown 運動の数学には「確率の微積分」が必要である.

1. Langevin 方程式.
   確率積分を考える動機づけ.
2. 確率積分（伊藤積分）

$$\int_0^t f(s, B_s)\mathrm{d}B_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k, B_{t_k})\Delta B_{t_k},$$

$$\Delta B_{t_k} = B_{t_{k+1}} - B_{t_k} \quad \text{（前進差分）.}$$

3. 伊藤の公式：確率過程に対する Taylor 展開.

$$\mathrm{d}f(t, B_t) = \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}B_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{d}B_t)^2, \quad (\mathrm{d}B_t)^2 = 2D\mathrm{d}t.$$

4. マルチンゲール：確率過程の「公平さ」.

補遺：いくつかの式の証明 (1)

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k,\omega)^2 \Delta t_k\right) = E\left(\int_0^t f(\tau,\omega)^2 \mathrm{d}\tau\right).$$

（証明）まず，確率変数の収束は 2 次平均収束で定義したことを思い出す.

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k,\omega)^2 \Delta t_k - \int_0^t f(\tau,\omega)^2 \mathrm{d}\tau\right|^2\right) = 0.$$

$S_n(\omega) :=$（離散和），$S(\omega) :=$（積分）とおく.
期待値（平均）$E(\cdot)$ は Lebesgue 積分であることを思い出せば，
Cauchy-Schwarz 不等式より，

$$\begin{aligned}
|E(S_n(\omega)) - E(S(\omega))| &= |E(S_n(\omega) - S(\omega))| \le E(|S_n(\omega) - S(\omega)|) \\
&\le E(|S_n(\omega) - S(\omega)|^2)^{1/2} \underbrace{E(1)^{1/2}}_{1} \\
&\to 0 \quad (\, n \to \infty \,).
\end{aligned}$$

■

補遺：いくつかの式の証明 (2)

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta B_{t_k})^2 \to 2Dt \quad (\, n \to \infty,\ 2\text{ 次平均収束}\,).$$

（証明）はじめに次の等式を示す．

$$E\left(\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta B_{t_k})^2 - 2Dt\right\}^2\right) = 8D^2\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta t_k)^2.$$

実際，

$$\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta B_{t_k})^2 - 2Dt\right\}^2 = \sum_{j,k}(\Delta B_{t_j})^2(\Delta B_{t_k})^2 - 4Dt\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta B_{t_k})^2 + (2Dt)^2$$

であり，両辺の平均を取ると，右辺第 1 項について，$j \neq k$ のとき ΔB_{t_j} と ΔB_{t_k} は独立であるから，

$$E\left(\sum_{j\neq k}(\Delta B_{t_j})^2(\Delta B_{t_k})^2\right) = \sum_{j\neq k} E\left((\Delta B_{t_j})^2\right) E\left((\Delta B_{t_k})^2\right)$$

$$= \sum_{j\neq k} 2D\Delta t_j \cdot 2D\Delta t_k = 4D^2\sum_{j\neq k}(\Delta t_j)(\Delta t_k).$$

$j=k$ なる項に対しては，

$$E\left(\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta B_{t_k})^4\right)=\sum_{k=0}^{n-1}E\left((\Delta B_{t_k})^4\right)=3\sum_{k=0}^{n-1}(2D\Delta t_k)^2=12D^2\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta t_k)^2.$$

以上より，

$$\begin{aligned}
&E\left(\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta B_{t_k})^2-2Dt\right\}^2\right)\\
&=12D^2\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta t_k)^2+4D^2\sum_{j\neq k}(\Delta t_j)(\Delta t_k)-4Dt\sum_{k=0}^{n-1}2D\Delta t_k+(2Dt)^2\\
&=8D^2\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta t_k)^2+4D^2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta t_k)^2+\sum_{j\neq k}(\Delta t_j)(\Delta t_k)\right\}-8D^2t+4D^2t^2\\
&=8D^2\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta t_k)^2+4D^2\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1}\Delta t_k\right)^2}_{t^2}-4D^2t^2=8D^2\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta t_k)^2.
\end{aligned}$$

補遺：いくつかの式の証明 (2, 続)

以上で示した等式を用いて，

$$E\left(\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta B_{t_k})^2-2Dt\right\}^2\right)=8D^2\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta t_k)^2\leq 8D^2\|\Delta_n\|\sum_{k=0}^{n-1}\Delta t_k$$

$$=8D^2t\|\Delta_n\|\to 0\quad(\,n\to\infty\,).$$

$$\therefore\quad\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta B_{t_k})^2\to 2Dt\quad(\,n\to\infty,\ 2\text{ 次平均収束}\,),$$

■