Brown 運動の数学
確率過程・確率解析（４）

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 9 月 24 日（金）

今回の内容

確率微分方程式を解く.

- Langevin 方程式.
- 確率微分方程式
  「伊藤の公式」を用いて解く.

(0/5) 復習

Wiener 過程　$B_t = B(t,\omega)$：一番基本的な確率過程.

- $B(t=0,\omega) = 0$.
- $B(t,\omega) - B(t',\omega)$ と $B(s,\omega) - B(s',\omega)$ ($t > t' \geq s > s'$) は独立である.
- （時刻 t_0，位置 x_0）→（時刻 t，位置 $x \sim x + \mathrm{d}x$）の遷移確率.

$$\mathscr{G}(t,x|t_0,x_0)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}\right] \mathrm{d}x$$

($D > 0$ ： const.).

- $$\langle B(t) \rangle = 0, \quad \langle (B(t) - B(t'))^2 \rangle = 2D(t-t') \quad (t > t').$$

(0/5) 復習

伊藤積分.

$$\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}B_s = \lim_{\|\Delta_n\|\to 0} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k,\omega)\Delta B_{t_k},$$

時間 $[0,t]$ の分割　$\Delta_n \ : \ 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t,$

$$\|\Delta_n\| = \max_{0\le k\le n-1} |t_{k+1} - t_k|,$$

$$\Delta B_{t_k} = B(t_{k+1},\omega) - B(t_k,\omega) \quad \text{（前進差分）}.$$

伊藤の公式.　$X_t = f(t,B_t),\ Y_t = g(t,X_t)$ に対し

$$\mathrm{d}X_t = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{x=B_t} \mathrm{d}t + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=B_t} \mathrm{d}B_t + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=B_t} \underbrace{(\mathrm{d}B_t)^2}_{2D\mathrm{d}t},$$

$$\mathrm{d}Y_t = \left.\frac{\partial g}{\partial t}\right|_{x=X_t} \mathrm{d}t + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=X_t} \mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right|_{x=X_t} (\mathrm{d}X_t)^2,$$

- $\mathrm{d}X_t$ $(\mathrm{d}B_t)$ は 0.5 次の微小量. $\to$ 空間微分は 2 階までとる.
- 確率微分方程式で多用する.

(1/5) Langevin 方程式：確率微分方程式に書き直す

Langevin 方程式：Brown 運動粒子の運動方程式

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\mu v + f(t,\omega),$$

v ： Brown 粒子の速度， M ： 質量， $\mu > 0$ ： const.,

$f(t,\omega)$ ： 揺動力（水分子の衝突）.

揺動力についての仮定.

- 平均=0.

$$\langle f(t)\rangle = 0.$$

- 衝撃的，かつ，相次ぐ衝突は独立である.

$$\langle f(t)f(t')\rangle = f_0^2\delta(t-t') \quad (\ f_0\ :\ \text{const.}\ ).$$

(1/5) Langevin 方程式：確率微分方程式に書き直す

揺動力 $f(t)$　$\langle f(t)\rangle = 0,\quad \langle f(t)f(t')\rangle = f_0^2\delta(t-t').$

一方，Wiener 過程 $B(t) = B(t,\omega)$ について次が成り立つ．

$$\begin{aligned} &(1)\quad \langle B(t)\rangle = 0,\\ &(2)\quad \langle B(t)B(t')\rangle = 2D\min\{t,t'\}. \end{aligned}$$

【(2) の証明】　$t > t'$ とすると，

$$\begin{aligned} \langle B(t)B(t')\rangle &= \langle (B(t)-B(t'))B(t')\rangle + \langle B(t')^2\rangle \\ &\qquad (B(t)-B(t') \text{ と } B(t') \text{ は独立だから}) \\ &= \langle B(t)-B(t')\rangle \underbrace{\langle B(t')\rangle}_{0} + \langle B(t')^2\rangle = 2Dt'. \end{aligned}$$

(1/5) Langevin 方程式：確率微分方程式に書き直す

$$\text{揺動力 } f(t) \quad \langle f(t)\rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t')\rangle = f_0^2\delta(t-t').$$

一方，Wiener 過程 $B(t) = B(t,\omega)$ について次が成り立つ.

$$(1) \quad \langle B(t)\rangle = 0,$$
$$(2) \quad \langle B(t)B(t')\rangle = 2D\min\{t,t'\}.$$

【(2) の証明】　$t > t'$ とすると，

$$\langle B(t)B(t')\rangle = \langle (B(t)-B(t'))B(t')\rangle + \langle B(t')^2\rangle$$

（$B(t)-B(t')$ と $B(t')$ は独立だから）

$$= \langle B(t)-B(t')\rangle \underbrace{\langle B(t')\rangle}_{0} + \langle B(t')^2\rangle = 2Dt'.$$

$$\langle B(t)B(t')\rangle = 2D\min\{t,t'\} = 2D\left\{t\theta(t'-t) + t'\theta(t-t')\right\},$$

$$\theta(t) := \begin{cases} 1 & (\ t>0\ ) \\ 0 & (\ t<0\ ) \end{cases}$$ Heaviside のステップ関数.

両辺を t, t' で微分すると，$\dot{\theta}(t) = \delta(t)$ を用いて，

(1/5) Langevin 方程式：確率微分方程式に書き直す

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}\langle B(t)B(t')\rangle = 2D\delta(t-t').$$

$$\text{揺動力 } f(t) \quad \langle f(t)f(t')\rangle = f_0^2\delta(t-t').$$

そこで，次のようにしたくなる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}\langle B(t)B(t')\rangle = \left\langle \frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}B(t')}{\mathrm{d}t'}\right\rangle = 2D\delta(t-t'),$$

$$f(t) = \sqrt{2D}\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}.$$

しかし，$B(t) = B(t,\omega)$ は t について微分不可能である．

そこで，Langevin 方程式を次のように書き直す．

$$M\mathrm{d}v = -\mu v\mathrm{d}t + \underbrace{f(t)\mathrm{d}t}_{\alpha \mathrm{d}B_t}.$$

(1/5) Langevin 方程式：確率微分方程式に書き直す

Langevin 方程式

Brown 運動する粒子に対する運動方程式（確率微分方程式）.

$$M\mathrm{d}v(t,\omega) = -\mu v(t,\omega)\mathrm{d}t + \alpha \mathrm{d}B(t,\omega),$$

$$v(t,\omega)\ :\ 速度,\quad M\ :\ 質量,$$

$$\mu > 0,\ \alpha > 0\ :\ \text{const.}.$$

(2/5) Langevin 方程式：速度分布

Langevin 方程式の解（粒子速度 $v(t,\omega)$）

$$\text{Langevin 方程式}\quad M\mathrm{d}v(t,\omega) = -\mu v(t,\omega)\mathrm{d}t + \alpha \mathrm{d}B(t,\omega),$$

$$\text{解}\quad v(t,\omega) = v_0 \mathrm{e}^{-\beta t} + \frac{\alpha}{M}\int_0^t \mathrm{e}^{-\beta(t-s)}\mathrm{d}B(s,\omega) \quad \left(\beta = \frac{\mu}{M}\right).$$

Langevin 方程式の解（粒子速度 $v(t,\omega)$）

$$\text{Langevin 方程式} \quad M\mathrm{d}v(t,\omega) = -\mu v(t,\omega)\mathrm{d}t + \alpha \mathrm{d}B(t,\omega),$$

$$\text{解} \quad v(t,\omega) = v_0 \mathrm{e}^{-\beta t} + \frac{\alpha}{M}\int_0^t \mathrm{e}^{-\beta(t-s)}\mathrm{d}B(s,\omega) \quad \left(\beta = \frac{\mu}{M}\right).$$

解の求め方：通常の微分方程式と同じ．

$\mathrm{d}v(t) = -\mu v(t)\mathrm{d}t$ の解は $v(t) = v_0\mathrm{e}^{-\beta t}$ (v_0 ： const.).

定数変化法により $v(t,\omega) = u(t,\omega)\mathrm{e}^{-\beta t}$ とおくと，

$$\mathrm{d}u(t,\omega) = \frac{\alpha}{M}\mathrm{e}^{\beta t}\mathrm{d}B(t,\omega), \quad u(t,\omega) = v_0 + \frac{\alpha}{M}\int_0^t \mathrm{e}^{\beta s}\mathrm{d}B(s,\omega),$$

$$\therefore \quad v(t,\omega) = v_0\mathrm{e}^{-\beta t} + \frac{\alpha}{M}\int_0^t \mathrm{e}^{-\beta(t-s)}\mathrm{d}B(s,\omega).$$

(2/5) Langevin 方程式：速度分布

Langevin 方程式の解

$$v(t,\omega) = v_0 \mathrm{e}^{-\beta t} + \frac{\alpha}{M}\int_0^t \mathrm{e}^{-\beta(t-s)}\mathrm{d}B(s,\omega).$$

どのような確率分布に従うだろうか？

(2/5) Langevin 方程式：速度分布

Langevin 方程式の解

$$v(t,\omega) = v_0 \mathrm{e}^{-\beta t} + \frac{\alpha}{M}\int_0^t \mathrm{e}^{-\beta(t-s)}\mathrm{d}B(s,\omega).$$

どのような確率分布に従うだろうか？

離散和で近似して考える.

$$v(t,\omega) \simeq v_N(t,\omega) = v_0 \mathrm{e}^{-\beta t} + \frac{\alpha}{M}\sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\beta(t-t_k)}\Delta B(t_k,\omega).$$

- 各 $\Delta B(t_k,\omega)$ は正規分布 $N(0, 2D\Delta t_k)$ に従う.
- 正規分布に従う確率変数の和も正規分布に従う.

(2/5) Langevin 方程式：速度分布

正規分布に従う確率変数の和も正規分布に従う.

- $X(\omega)$：正規分布 $N(m_X, \omega_X^2)$ に従う.
- $Y(\omega)$：正規分布 $N(m_Y, \omega_Y^2)$ に従う.

正規分布 $N(m, \sigma^2)$ の確率密度関数.

$$\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma}\right].$$

特性関数（確率密度関数の Fourier 変換）.

$$\varphi(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}zx} \mathrm{d}x = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} z^2 + \mathrm{i}mz\right).$$

(2/5) Langevin 方程式：速度分布

確率変数の和 $X(\omega)+Y(\omega)$ の
確率密度関数 $\mu_{X+Y}(x)$，特性関数 $\varphi_{X+Y}(z)$.

$$\mu_{X+Y}(x)=(\mu_X*\mu_Y)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mu_X(x-y)\mu_Y(y)\mathrm{d}y$$

（畳み込み積），

$$\varphi_{X+Y}(z)=\varphi_X(z)\varphi_Y(z).$$

$*$ 畳み込み積は Fourier 変換で普通の積になる.

$X(\omega), Y(\omega)$ がそれぞれ正規分布 $N(m_X,\omega_X^2)$, $N(m_Y,\omega_Y^2)$ に従うならば,

$$\varphi_{aX+bY}(z)=\exp\left[-\frac{1}{2}(a^2\sigma_X^2+b^2\sigma_Y^2)z^2+\mathrm{i}(am_X+bm_Y)z\right],$$

$\therefore\quad aX(\omega)+bY(\omega)$ は正規分布 $N\left(am_X+bm_Y,a^2\sigma_X^2+b^2\sigma_Y^2\right)$ に従う.

(2/5) Langevin 方程式：速度分布

$$v(t,\omega) \simeq v_N(t,\omega) = v_0 \mathrm{e}^{-\beta t} + \frac{\alpha}{M} \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\beta(t-t_k)} \Delta B(t_k,\omega).$$

$v_N(t,\omega)$ は正規分布に従う（$(\Delta B)^2 = 2D\Delta t$ を思い出す）．

- 平均：$v_0 \mathrm{e}^{-\beta t}$.
- 分散：$\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{\alpha}{M} \mathrm{e}^{-\beta(t-t_k)}\right)^2 2D\Delta t_k$

(2/5) Langevin 方程式：速度分布

$$v(t,\omega) \simeq v_N(t,\omega) = v_0 \mathrm{e}^{-\beta t} + \frac{\alpha}{M} \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\beta(t-t_k)} \Delta B(t_k,\omega).$$

$v_N(t,\omega)$ は正規分布に従う（$(\Delta B)^2 = 2D\Delta t$ を思い出す）．

- 平均：$v_0 \mathrm{e}^{-\beta t}$.
- 分散：$\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{\alpha}{M} \mathrm{e}^{-\beta(t-t_k)} \right)^2 2D\Delta t_k$

$$v(t,\omega) = \lim_{N\to\infty} v_N(t,\omega) = v_0 \mathrm{e}^{-\beta t} + \frac{\alpha}{M} \int_0^t \mathrm{e}^{-\beta(t-s)} \mathrm{d}B(s,\omega).$$

$N \to \infty$ とする． $\Rightarrow$ $v(t,\omega)$ は正規分布に従う．

- 平均：$v_0 \mathrm{e}^{-\beta t}$.
- 分散：

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{\alpha}{M} \mathrm{e}^{-\beta(t-t_k)} \right)^2 2D\Delta t_k = \int_0^t \left(\frac{\alpha}{M} \mathrm{e}^{-\beta(t-t_k)} \right)^2 2D\mathrm{d}t$$

$$v(t,\omega) = v_0 \mathrm{e}^{-\beta t} + \frac{\alpha}{M}\int_0^t \mathrm{e}^{-\beta(t-s)}\mathrm{d}B(s,\omega).$$

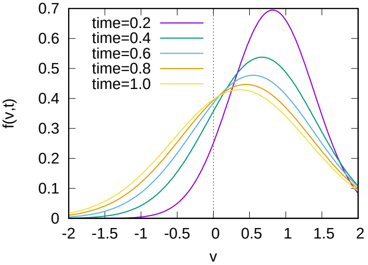
$v(t,\omega)$ は正規分布 $N(v_0\mathrm{e}^{-\beta t}, \sigma_v^2(t))$ $\left(\sigma_v^2(t) = \dfrac{D\alpha^2}{\beta M^2}(1-\mathrm{e}^{-2\beta t})\right)$ に従う.

粒子速度 $v(t,\omega)$ の確率分布

Ornstein-Uhlenbeck 分布.

$$f(v,t|v_0,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v(t)}\exp\left[-\frac{(v-v_0\mathrm{e}^{-\beta t})^2}{2\sigma_v^2(t)}\right],$$

$$\sigma_v^2(t) = \frac{D\alpha^2}{\beta M^2}(1-\mathrm{e}^{-2\beta t}).$$



- 縦軸：$\sigma_v(0) f(v, t | v_0, 0)$.
- 横軸：$v / \sigma_v(0)$.
- $\text{time} = \beta t$.
- $v_0 = \sigma_v(0)$.

Ornstein-Uhlenbeck 分布.

$$f(v, t | v_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v(t)} \exp\left[-\frac{(v - v_0 \mathrm{e}^{-\beta t})^2}{2\sigma_v^2(t)}\right],$$

$$\sigma_v^2(t) = \frac{D\alpha^2}{\beta M^2}(1 - \mathrm{e}^{-2\beta t}).$$

(2/5) Langevin 方程式：速度分布

Ornstein-Uhlenbeck 分布.

$$f(v,t|v_0,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v(t)}\exp\left[-\frac{(v-v_0\mathrm{e}^{-\beta t})^2}{2\sigma_v^2(t)}\right],\quad \sigma_v^2(t)=\frac{D\alpha^2}{\beta M^2}(1-\mathrm{e}^{-2\beta t}).$$

極限 $t\to\infty$ を調べる.

(2/5) Langevin 方程式：速度分布

Ornstein-Uhlenbeck 分布．

$$f(v,t|v_0,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v(t)}\exp\left[-\frac{(v-v_0\mathrm{e}^{-\beta t})^2}{2\sigma_v^2(t)}\right],\quad \sigma_v^2(t)=\frac{D\alpha^2}{\beta M^2}(1-\mathrm{e}^{-2\beta t}).$$

極限 $t\to\infty$ を調べる．

$$\begin{aligned}\langle v(t,\omega)^2\rangle &= (v_0\mathrm{e}^{-\beta t})^2+\sigma_v^2(t)\\ &= v_0^2\mathrm{e}^{-2\beta t}+\frac{D\alpha^2}{\beta M^2}(1-\mathrm{e}^{-2\beta t}),\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left\langle\frac{M}{2}v(t,\omega)^2\right\rangle=\frac{D\alpha^2}{2\beta M}=\frac{k_\mathrm{B}T}{2}\quad\text{（エネルギー等分配則）},$$

$$\therefore\quad \frac{D\alpha^2}{\beta M^2}=\frac{k_\mathrm{B}T}{M},$$

(2/5) Langevin 方程式：速度分布

Ornstein-Uhlenbeck 分布.

$$f(v,t|v_0,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v(t)}\exp\left[-\frac{(v-v_0\mathrm{e}^{-\beta t})^2}{2\sigma_v^2(t)}\right],\quad \sigma_v^2(t)=\frac{D\alpha^2}{\beta M^2}(1-\mathrm{e}^{-2\beta t}).$$

極限 $t\to\infty$ を調べる.

$$\begin{aligned}\langle v(t,\omega)^2\rangle &= (v_0\mathrm{e}^{-\beta t})^2+\sigma_v^2(t)\\ &= v_0^2\mathrm{e}^{-2\beta t}+\frac{D\alpha^2}{\beta M^2}(1-\mathrm{e}^{-2\beta t}),\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left\langle\frac{M}{2}v(t,\omega)^2\right\rangle=\frac{D\alpha^2}{2\beta M}=\frac{k_\mathrm{B}T}{2}\quad\text{（エネルギー等分配則）},$$

$$\therefore\quad \frac{D\alpha^2}{\beta M^2}=\frac{k_\mathrm{B}T}{M},$$

Maxwell-Boltzman 分布

$$\lim_{t\to\infty}f(v,t|v_0,0)=\sqrt{\frac{M}{2\pi k_\mathrm{B}T}}\exp\left(-\frac{M}{2k_\mathrm{B}T}v^2\right).$$

(3/5) Langevin 方程式：位置分布

粒子の位置 $x(t,\omega)$ を求める．

$$v(t,\omega) = v_0 \mathrm{e}^{-\beta t} + \frac{\alpha}{M}\int_0^t \mathrm{e}^{-\beta(t-s)}\mathrm{d}B(s,\omega),$$

$$x(t,\omega) = \int_0^t v(s,\omega)\mathrm{d}s + x_0 \quad (\, x_0 = x(t=0,\omega)\,)$$

粒子位置 $x(t,\omega)$

$$x(t,\omega) = x_0 + \frac{v_0}{\beta}(1-\mathrm{e}^{-\beta t}) + \frac{\alpha}{\beta M}\int_0^t (1-\mathrm{e}^{-\beta(t-s)})\mathrm{d}B(s,\omega).$$

$x(t,\omega)$ もまた正規分布に従う．先程と同様の計算により，

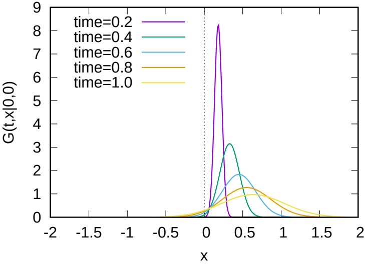
- 平均：$x_0 + \dfrac{v_0}{\beta}(1-\mathrm{e}^{-\beta t})$.
- 分散：

$$\sigma_x^2(t) = 2D\left(\frac{\alpha}{\beta M}\right)^2 \left\{ t - \frac{2}{\beta}(1-\mathrm{e}^{-\beta t}) + \frac{1}{2\beta}(1-\mathrm{e}^{-2\beta t}) \right\}.$$

$(t, x) = (0, 0) \to (t, x \sim x + \mathrm{d}x)$ の遷移確率

$$\mathscr{G}(t, x|0, 0)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x(t)} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_x^2(t)}\left(x - \frac{v_0}{\beta}(1 - \mathrm{e}^{-\beta t})\right)^2\right] \mathrm{d}x,$$

$$\sigma_x^2(t) = 2D\left(\frac{\alpha}{\beta M}\right)^2 \left\{t - \frac{2}{\beta}(1 - \mathrm{e}^{-\beta t}) + \frac{1}{2\beta}(1 - \mathrm{e}^{-2\beta t})\right\}.$$



- 縦軸：$\sqrt{2D}(\alpha/\beta M)\mathscr{G}(t, x|v_0, 0)$.
- 横軸：$(\beta^2 M/\sqrt{2D}\alpha)x$.
- time $= \beta t$.
- $v_0 = (\sqrt{2D}\alpha/\beta M) \times 1.0$.

(3/5) Langevin 方程式：位置分布

$$\mathscr{G}(t,x|0,0)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x(t)}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_x^2(t)}\left(x-\frac{v_0}{\beta}(1-\mathrm{e}^{-\beta t})\right)^2\right],$$

$t\to\infty$ における挙動.

$$\sigma_x^2(t)\sim 2\left(\frac{\alpha}{\beta M}\right)^2 t=2D_{\mathrm{OU}}t \quad (\,t\to\infty\,).$$

$$\text{拡散係数}\quad D_{\mathrm{OU}}=D\left(\frac{\alpha}{\beta M}\right)^2=\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\mu}.$$

$$\mathscr{G}(t,x|0,0)\sim\frac{1}{\sqrt{4\pi D_{\mathrm{OU}}t}}\exp\left[-\frac{(x-v_0/\beta)^2}{4D_{\mathrm{OU}}t}\right]\quad (\,t\to\infty\,).$$

(3/5) Langevin 方程式：位置分布

遷移確率の $t \to \infty$ における挙動

$$\mathscr{G}(t, x|0,0) \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi D_{\mathrm{OU}} t}} \exp\left[-\frac{(x - v_0/\beta)^2}{4 D_{\mathrm{OU}} t}\right] \quad (\, t \to \infty \,).$$

$*$ 熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (\, -\infty < x < \infty,\ t > 0 \,) \\ u(x, t = 0) = f(x) & (\, -\infty < x < \infty \,). \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, x - \xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi,$$

$$G(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad \text{熱核.}$$

(4/5) 確率微分方程式を解く

今まで考えた Langevin 方程式は一番簡単な Brown 運動のモデルである．

$$\mathrm{d}v = -\mu v \mathrm{d}t + \alpha \mathrm{d}B_t.$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{d}v = -\mu(t, v) v \mathrm{d}t + \alpha(t, v) \mathrm{d}B_t.$$

本来はこういう方程式を解くべき．

これから，いくつかの確率微分方程式を解いてみる．
伊藤の公式を多用する． $Y_t = f(t, X_t)$ に対し

$$\mathrm{d}Y_t = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{x=X_t} \mathrm{d}t + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=X_t} \mathrm{d}X_t + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=X_t} (\mathrm{d}X_t)^2,$$
$$(\mathrm{d}B_t)^2 = 2D\mathrm{d}t.$$

$\mathrm{d}X_t$ $(\mathrm{d}B_t)$ は 0.5 次の微小量である．
以降，物理的考察はしないので， $D = 1/2 \ \big((\mathrm{d}B_t)^2 = \mathrm{d}t \big)$ とおく．

例題 1

$$\mathrm{d}X_t = -X_t\mathrm{d}t + \mathrm{e}^t\mathrm{d}B_t.$$

【解答】$\mathrm{d}X_t = -X_t\mathrm{d}t$ は $X_t = X_0\mathrm{e}^{-t}$ ($X_0 = X_{t=0}$) を解に持つ．
$X_t = Y_t\mathrm{e}^{-t}$ とおく（定数変化法）．

$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}Y_t\mathrm{e}^{-t} - Y_t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -Y_t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + \mathrm{e}^t\mathrm{d}B_t,$$

$$\mathrm{d}Y_t = \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}B_t, \quad Y_t = X_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{2s}\mathrm{d}B_s.$$

$$\therefore \quad X_t = X_0\mathrm{e}^{-t} + \int_0^t \mathrm{e}^{2s-t}\mathrm{d}B_s$$

$$= X_0\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t B_t - 2\int_0^t \mathrm{e}^{2s-t}B_s\mathrm{d}s$$

（部分積分を用いた）.

例題 2

$$\mathrm{d}X_t = a\mathrm{d}t + bX_t\mathrm{d}B_t \quad (\ a, b\ :\ \mathrm{const.}\ ).$$

【解答】まず，方程式 $\mathrm{d}X_t = bX_t\mathrm{d}B_t$ をとく．
$\log X_t$ に伊藤の公式を適用すると，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\log X_t &= \frac{\mathrm{d}X_t}{X_t} - \frac{1}{2X_t^2}(\mathrm{d}X_t)^2 \\ &= \frac{\mathrm{d}X_t}{X_t} - \frac{1}{2X_t^2}b^2X_t^2\underbrace{(\mathrm{d}B_t)^2}_{\mathrm{d}t} = b\mathrm{d}B_t - \frac{b^2}{2}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$$\log X_t - \log X_0 = bB_t - \frac{b^2}{2}t \quad (\ X_0 = X_{t=0}\ ),$$

$$X_t = \exp\left(bB_t - \frac{b^2}{2}t\right)X_0.$$

そこで，$X_t = \exp\left(bB_t - \frac{b^2}{2}t\right)Y_t$ とおく（定数変化法）．

(4/5) 確率微分方程式を解く

例題 2

$$\mathrm{d}X_t = a\mathrm{d}t + bX_t\mathrm{d}B_t \quad (\, a, b \;:\; \text{const.}\,).$$

$Y_t = \exp\left(-bB_t + \frac{b^2}{2}t\right) X_t$. 伊藤の公式を適用すると,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Y_t &= \frac{\partial Y_t}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial Y_t}{\partial B_t}\mathrm{d}B_t + \frac{\partial Y_t}{\partial X_t}\mathrm{d}X_t \\
&\quad + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 Y_t}{\partial X_t^2}(\mathrm{d}X_t)^2 + 2\frac{\partial^2 Y_t}{\partial X_t \partial B_t}\mathrm{d}X_t\mathrm{d}B_t + \frac{\partial^2 Y_t}{\partial B_t^2}(\mathrm{d}B_t)^2\right\} \\
&\quad \text{（X_t, B_t については 2 次の微小量までとる）} \\
&= \frac{b^2}{2}Y_t\mathrm{d}t - bY_t\mathrm{d}B_t + \exp\left(-bB_t + \frac{b^2}{2}t\right)\mathrm{d}X_t \\
&\quad - b\exp\left(-bB_t + \frac{b^2}{2}t\right)\mathrm{d}X_t\mathrm{d}B_t + \frac{b^2}{2}Y_t(\mathrm{d}B_t)^2.
\end{aligned}$$

$\mathrm{d}X_t = a\mathrm{d}t + bX_t\mathrm{d}B_t$, $\mathrm{d}t\mathrm{d}B_t = 0$, $(\mathrm{d}B_t)^2 = \mathrm{d}t$ を用いて整理して,

(4/5) 確率微分方程式を解く

例題 2

$$\mathrm{d}X_t = a\mathrm{d}t + bX_t\mathrm{d}B_t \quad (\, a, b \ : \ \text{const.}\,).$$

$Y_t = \exp\left(-bB_t + \dfrac{b^2}{2}t\right)X_t$. について，

$$\mathrm{d}Y_t = a\exp\left(-bB_t + \frac{b^2}{2}\right)\mathrm{d}t,$$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t a\exp\left(-bB_s + \frac{b^2}{2}s\right)\mathrm{d}s.$$

$$\therefore \quad X_t = X_0\exp\left(bt - \frac{b^2}{2}B_t\right) + a\int_0^t \exp\left[b(B_t - B_s) - \frac{b^2}{2}(t-s)\right]\mathrm{d}s.$$

(5/5) 確率微分方程式の解の一意的存在

確率微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t,\omega) = a(t, X(t,\omega))\mathrm{dt} + b(t, X(t,\omega))\mathrm{d}B_t(\omega), \\ X(0) = x_0. \end{cases}$$

$a(t,x), b(t,x)$ は次を満たすとする．

- $a(t,x), b(t,x)$ は (t,x) の連続関数である．
- $a(t,x), b(t,x)$ は次の Lipshitz 条件を満たす（$c > 0$ は定数）．

$$|a(t,x) - a(t,y)| \le c|x-y|, \quad |b(t,x) - b(t,y)| \le c|x-y|.$$

このとき，確率微分方程式の初期値問題の解 $X(t,\omega)$ は
ただ一つだけ存在する．

$*$ $X(t,\omega), X'(t,\omega)$ が初期値問題の解なら，

$$P\left(\,|X(t,\omega) - X'(t,\omega)| = 1\ (\,\forall t\,)\,\right) = 1.$$

まとめ

1. Langevin 方程式（確率微分方程式）

$$M\mathrm{d}v(t,\omega) = -\mu v(t,\omega)\mathrm{d}t + \alpha \mathrm{d}B(t,\omega).$$

   - 速度分布：Ornstein-Uhlenbeck 分布
     $\to$ Maxwell-Boltzmann 分布 ($t \to \infty$)
   - 位置分布：$t \to \infty$ で熱核に近づく.

2. 確率微分方程式
   - 伊藤の公式
   - $\mathrm{d}B_t$ は 0.5 次の微小量. $(\mathrm{d}B_t)^2 = 2D\mathrm{d}t$.

3. 確率微分方程式の初期値問題の解の一意的存在.