解析力学 (2)
幾何学的視点から

緒方秀教

電気通信大学大学院　情報・ネットワーク工学専攻

December 25, 2021

はじめに

- Hamilton の原理（最小作用の原理）：解析力学の第一原理は変分原理．

$$\delta S[q] = \delta \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}} L \mathrm{d}t = 0 \quad (L \ : \ \text{Lagrangian}) \quad \rightarrow \quad \text{実際の物体の運動.}$$

- 共変ベクトル（$\leftrightarrow$ 反変ベクトル）→コベクトル．
- 物理系の不変性 $\leftrightarrow$ 保存量．
  - 運動量・エネルギー保存則．
  - Noether の定理．

今回の内容

今回の内容

変分原理（Hamilton の原理）

Hamilton の原理（最小作用の原理）

時刻 $t = t_{\mathrm{I}}$ に点 $q_{\mathrm{I}} = (q^1_{(\mathrm{I})}, \ldots, q^N_{(\mathrm{I})})$ を出発し時刻 $t = t_{\mathrm{F}}$ に点 $q_{\mathrm{F}} = (q^1_{(\mathrm{F})}, \ldots, q^N_{(\mathrm{F})})$ に到着する物理系の軌道は，作用

$$S[q(\cdot)] := \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}} \mathrm{d}t L(q(t), \dot{q}(t), t),$$

$$\text{Lagrangian} \quad L(q(t), \dot{q}(t), t) := T(q, \dot{q}) - U(q, \dot{q}, t)$$

$$= \text{（運動エネルギー）} - \text{（ポテンシャル）}$$

を停留にする経路 $q(t) = (q^1(t), \ldots, q^N(t))$ ($t_{\mathrm{I}} \leq t \leq t_{\mathrm{F}}$) として定まる：

$$\delta S[q(\cdot)] = \delta \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}} \mathrm{d}t L(q(t), \dot{q}(t), t) = 0,$$

$$\text{s.t.} \quad q(t_{\mathrm{I}}) = q_{\mathrm{I}}, \quad q(t_{\mathrm{F}}) = q_{\mathrm{F}}.$$

変分原理（Hamilton の原理）

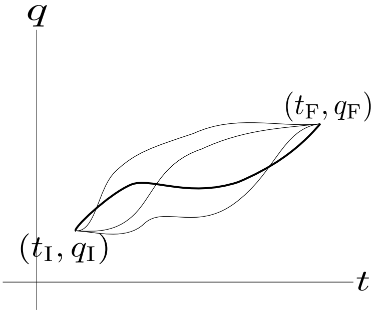
Hamilton の原理

$$\delta S[x(\cdot)] = \delta \int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} \mathrm{d}t L(q(t), \dot{q}(t), t) = 0,$$

s.t. $\quad q(t_\mathrm{I}), q(t_\mathrm{F}) \quad$ fixed.

$$\Downarrow$$

物理系の実際の軌道 $q(t)$.



変分原理（Hamilton の原理）

Hamilton の原理から Lagrange 運動方程式が得られる．

$$
\begin{aligned}
q(t) &\ : \delta S[q] = 0 \text{ を満たす解}, \\
q(t) + \delta q(t) &\ : \text{解から微小にずれた経路，ただし，} \delta q(t_{\mathrm{I}}) = \delta q(t_{\mathrm{F}}) = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta S[q] &= S[q + \delta q] - S[q] \\
&= \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}} \mathrm{d}t \left\{ L((q + \delta q)(t), (\dot{q} + \delta \dot{q})(t), t) - L(q(t), \dot{q}(t), t) \right\} \\
&= \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}} \mathrm{d}t \left\{ \delta q^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}} + \delta \dot{q}^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \right\} \quad \text{第 2 項に部分積分を施す} \\
&= \underbrace{\left[\delta q^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right]_{t=t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}}}_{0 \ \because \ \delta q(t_{\mathrm{I}}) = \delta q(t_{\mathrm{F}}) = 0} - \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}} \mathrm{d}t \delta q^{\alpha} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}} \right\} = 0,
\end{aligned}
$$

変分原理（Hamilton の原理）

Hamilton の原理から Lagrange 運動方程式が得られる．

$$
\begin{aligned}
q(t) \ &: \delta S[q] = 0 \text{ を満たす解}, \\
q(t) + \delta q(t) \ &: \text{解から微小にずれた経路，ただし，} \delta q(t_{\mathrm{I}}) = \delta q(t_{\mathrm{F}}) = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}} \mathrm{d}t \delta q^{\alpha}(t) \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}} \right\} = 0 \quad \text{for } \forall \delta q(t) \quad \text{s.t. } \delta q(t_{\mathrm{I}}) = \delta q(t_{\mathrm{F}}) = 0,
$$

Lagrange 運動方程式

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}} = 0 \quad (\, \alpha = 1, \ldots, N \,).
$$

変分原理（Hamilton の原理）：Lagrange 運動方程式の共変性

Lagrange 運動方程式の左辺は共変ベクトルである，i.e., 点変換 $(q^\alpha) \to (Q^\alpha)$ に対し，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}^\alpha}\right) - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial Q^\alpha} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\beta}\right] \frac{\partial q^\beta}{\partial Q^\alpha} \tag{1}$$

（前回動画参照）．

これは変分原理（Hamilton の原理）からも説明できる．

$$\int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} \mathrm{d}t \delta Q^\alpha \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}^\alpha}\right) - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial Q^\alpha}\right] = \int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} \mathrm{d}t \delta q^\alpha \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\right] (= 0),$$

$$\delta q^\alpha = \delta Q^\beta \frac{\partial q^\alpha}{\partial Q^\beta}$$

から (1) を得る．

今回の内容

共変ベクトル場

点変換 $(q^\alpha) \to (Q^\alpha)$ に対し

- スカラー場：不変な量．
- 反変ベクトル場：次のように変換する量の組 $(X^\alpha(q))$．

$$X^\alpha(q) \to \widetilde{X}^\alpha(Q) = X^\beta(q)\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta}.$$

- 共変ベクトル場：次のように変換する量の組 $(\omega_\alpha(q))$．

$$\omega_\alpha(q) \to \widetilde{\omega}_\alpha(Q) = \omega_\beta(q)\frac{\partial q^\beta}{\partial Q^\alpha}.$$

共変ベクトル場

反変ベクトル場：接ベクトル場の成分．

$$\boldsymbol{X} = X^{\alpha}(q)\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^{\alpha}}.$$

点変換 $(q^{\alpha}) \to (Q^{\alpha})$ において，

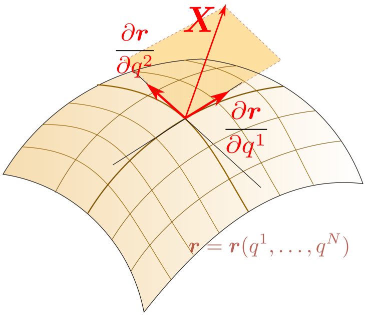
$$\widetilde{X}^{\alpha}(Q) = X^{\beta}(q)\frac{\partial Q^{\alpha}}{\partial q^{\beta}}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial Q^{\alpha}} = \frac{\partial q^{\beta}}{\partial Q^{\alpha}}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^{\beta}}.$$

$$\frac{\partial Q^{\alpha}}{\partial q^{\kappa}}\frac{\partial q^{\lambda}}{\partial Q^{\alpha}} = \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial q^{\kappa}} = \delta^{\lambda}_{\kappa} = \begin{cases} 1 & (\kappa = \lambda) \\ 0 & (\kappa \neq \lambda) \end{cases}$$ を用いて，

$$\widetilde{X}^{\alpha}(Q)\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial Q^{\alpha}} = X^{\alpha}(q)\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^{\alpha}}.$$

$\therefore$ 接ベクトル場が矛盾なく与えられる．

では，共変ベクトル場は何を与えるか？



共変ベクトル場

コベクトルと共変ベクトル場

- コベクトル (covector) 場 ω：接ベクトル場をスカラー場に写す線形写像 $\boldsymbol{X} \mapsto \langle \omega | \boldsymbol{X} \rangle \in \mathbb{R}$,

$$\langle \omega | c_1 \boldsymbol{X}_1 + c_2 \boldsymbol{X}_2 \rangle = c_1 \langle \omega | \boldsymbol{X}_1 \rangle + c_2 \langle \omega | \boldsymbol{X}_2 \rangle \quad (\, \forall \text{vectors } \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2,\ \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,).$$

- 共変ベクトル場はコベクトル場の成分である．

接ベクトル場の基底 $\left\{ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\alpha} \right\}_{\alpha=1,\ldots,N}$ に関するコベクトルの双対基底を $\{\mathrm{d}q^\alpha\}_{\alpha=1,\ldots,N}$ と記す．

$$\left\langle \mathrm{d}q^\alpha \middle| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\beta} \right\rangle = \delta^\alpha_\beta = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta). \end{cases}$$

共変ベクトル場

点変換 $(q^\alpha) \to (Q^\alpha)$ を考える．

接ベクトル場の基底 $\left\{ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial Q^\alpha} \right\}_{\alpha=1,\dots,N}$ に関するコベクトルの双対基底 $\{\mathrm{d}Q^\alpha\}_{\alpha=1,\dots,N}$ について，

$$\left\langle \mathrm{d}Q^\alpha \middle| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial Q^\beta} \right\rangle = \delta^\alpha_\beta, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial Q^\alpha} = \frac{\partial q^\beta}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\beta},$$

$$\therefore \quad \mathrm{d}Q^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta} \mathrm{d}q^\beta$$ 全微分の公式と同じ形.

共変ベクトル場 $(\omega_\alpha(q))$ に対し，$\widetilde{\omega}_\alpha(Q) = \dfrac{\partial q^\beta}{\partial Q^\alpha} \omega_\beta(q)$ と変換するから，

$$\omega = \omega_\alpha(q)\mathrm{d}q^\alpha = \widetilde{\omega}_\alpha(Q)\mathrm{d}Q^\alpha.$$

$\therefore$ コベクトルを矛盾なく与えられる．

今回の内容

運動量・エネルギーとその保存則

- 物理系が不変性（対称性）をもつと，それに対応して保存量が存在する．
- 解析力学ではその対応が明確に示される．
    - 一般化運動量，エネルギー．
    - Noether の定理．

運動量・エネルギーとその保存則

エネルギー保存則

Lagrangian L が時刻 t を陽に含まない場合，エネルギーが保存される．

【証明】まず，座標 q が Lagrange 運動方程式の解 $q(t)$ のとき次の量が保存されることを見る．

$$E := \dot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - L.$$

実際，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \ddot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} + \dot{q}^\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \left(\dot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} + \ddot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) \\ &= \dot{q}^\alpha \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\right] = 0.\end{aligned}$$

運動量・エネルギーとその保存則

次に，E がエネルギーに一致することを示す．

運動エネルギー T は，前回の動画で見たように次のように表される．

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha,$$

$$T = \sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} \frac{m_i}{2}\|\dot{\boldsymbol{r}}_i\|^2 = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(q)\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta \quad \left(g_{\alpha\beta}(q) = \sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} \frac{m_i}{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta} \right).$$

よって，運動エネルギー T は $\dot{q}^\alpha$ ($\alpha = 1, \ldots, n$) の斉次二次式であるから，

$$\dot{q}^\alpha\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} = 2T. \quad \therefore \quad E = \dot{q}^\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - L = 2T - (T - U) = T + U = \text{エネルギー}.$$

■

運動量・エネルギーとその保存則

次に，E がエネルギーに一致することを示す．
運動エネルギー T は，前回の動画で見たように次のように表される．

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha,$$

$$T = \sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} \frac{m_i}{2}\|\dot{\boldsymbol{r}}_i\|^2 = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(q)\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta \quad \left(g_{\alpha\beta}(q) = \sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} \frac{m_i}{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta}\right).$$

よって，運動エネルギー T は $\dot{q}^\alpha$（$\alpha = 1, \ldots, n$）の斉次二次式であるから，

$$\dot{q}^\alpha\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} = 2T. \quad \therefore \quad E = \dot{q}^\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - L = 2T - (T - U) = T + U = \text{エネルギー}.$$

■

エネルギーの定義（Lagrange 形式の解析力学）

$$\text{エネルギー} \quad E := \dot{q}^\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - L.$$

運動量・エネルギーとその保存則

斉次 m 次式 $f(x_1, \ldots, x_n)$

$$f(cx_1, \ldots, cx_n) = c^m f(x_1, \ldots, x_n). \tag{2}$$

(2) の両辺を c について微分して，

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_{x_i}(cx_1, \ldots, cx_n) = mc^{m-1} f(x_1, \ldots, x_n) \quad \left(f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

$c = 1$ とおいて，

(Euler)

斉次 m 次式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = mf.$$

運動量・エネルギーとその保存則

一般座標 q_α に対応する一般運動量

$$p_\alpha := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}.$$

運動量・エネルギーとその保存則

一般座標 q_α に対応する一般運動量

$$p_\alpha := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}.$$

- 一粒子系，Cartesian 座標

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(t, x, y, z),$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad \text{従来の運動量}.$$

- 二次元運動する一粒子系，極座標

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(t, r, \theta),$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad \text{角運動量}.$$

運動量・エネルギーとその保存則

運動量は共変ベクトル場である，i.e.，点変換 $(q^\alpha) \to (Q^\alpha)$ に対し次のように変換する．

$$p_\alpha \to P_\alpha = p_\beta \frac{\partial q^\beta}{\partial Q^\alpha}.$$

【証明】新座標 (Q^α) における Lagrangian は $\widetilde{L} = L(q(Q), \dot{Q}(q, \dot{q}), t)$ である．

$$\dot{Q}^\alpha = \dot{q}^\beta \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta} \quad \text{より} \quad \frac{\partial \dot{Q}^\alpha}{\partial \dot{q}^\beta} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta}$$

であることをもちいて，

$$P_\alpha = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}\frac{\partial \dot{q}^\beta}{\partial \dot{Q}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}\frac{\partial q^\beta}{\partial Q^\alpha} = p_\beta \frac{\partial q^\beta}{\partial Q^\alpha}.$$

$p_\alpha \mathrm{d}q^\alpha$ はコベクトル場を与える（正準 1 形式）．

運動量・エネルギーとその保存則

循環座標

Lagrangian L が座標 q_α を陽に含まないとき，q_α を循環座標とよぶ．

運動量・エネルギーとその保存則

循環座標

Lagrangian L が座標 q_α を陽に含まないとき，q_α を循環座標とよぶ．

q_α が循環座標ならば，Lagrange 運動方程式より

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}t}, \quad \therefore \quad p_\alpha = \text{const.}$$

運動量保存則

循環座標に対応する一般運動量は保存する．

運動量・エネルギーとその保存則

- 一粒子，三次元 Cartesian 座標
  外力が存在しない場合，L は x, y, z を陽に含まない．

$$p_x = m\dot{x} = \text{const.} \quad p_y = m\dot{y} = \text{const.} \quad p_z = m\dot{z} = \text{const.}$$

$$\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z) = \text{const.} \quad \text{従来の運動量保存則．}$$

- 二次元運動する一粒子系，極座標．
  中心力による運動の場合，L は θ を陽に含まない．

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \text{const.} \quad \text{角運動量保存則．}$$

初等力学における運動量保存則，二次元角運動量保存則が，
解析力学ではひとつの法則（一般運動量の保存則）に統合される．

運動量・エネルギーとその保存則

エネルギーは時間 t に対応する運動量とみなせる．

別の時間変数 τ を導入し，時間 t を一般座標のひとつとみなす：

$$t = t(\tau), \quad \frac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}\tau}\Big/\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{q'_\alpha}{t'} \quad \left({}' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}.\right).$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q})\mathrm{d}t = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left(t(\tau), q(\tau), \frac{q'(\tau)}{t'(\tau)}\right) t'\mathrm{d}\tau,$$

時間変数を τ としたときの Lagrangian．

$$\widetilde{L}(q, t, q', t') = t' L\left(t, q, \frac{q'}{t'}\right).$$

運動量・エネルギーとその保存則

$t = t(\tau)$ に対応する一般運動量

$$
\begin{aligned}
p_t = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t'}\left\{ t' L\left(t, q, \frac{q'}{t'}\right)\right\} \\
&= L\left(t, q, \frac{q'}{t'}\right) + t' \sum_{\alpha=1}^{n} \left(-\frac{q'_\alpha}{t'^2}\right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\left(t, q, \frac{q'}{t'}\right) \\
&= L\left(t, q, \frac{q'}{t'}\right) - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{q'_\alpha}{t'} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\left(t, q, \frac{q'}{t'}\right) \\
&= L(t, q, \dot{q}) - \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{q}_\alpha p_\alpha = -E.
\end{aligned}
$$

エネルギーは時間 t に対応する運動量である

$$
E = -p_t.
$$

運動量・エネルギーとその保存則

【注意】空間座標に対応する運動量 p_α は新しい Lagrangian $\widetilde{L}$ を使っても定義できる．

$$\widetilde{L}(\tau, q, q') = t' L\left(t(\tau), q(\tau), \frac{q'(\tau)}{t'}\right).$$

$$\widetilde{p}_\alpha := \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q'_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q'_\alpha}\left\{t' L\left(t(\tau), q(\tau), \ldots, \frac{q'_\alpha(\tau)}{t'(\tau)}, \ldots\right)\right\}$$

$$= t' \cdot \frac{1}{t'}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = p_\alpha,$$

$$\therefore \quad \widetilde{p}_\alpha = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q'_\alpha} = p_\alpha.$$

エネルギーは時間 t に対応する運動量とみなせるので，エネルギー保存則も運動量保存則のひとつとみなすことができる．

今回の内容

Noether の定理

物理系が不変性を持つ時，それに対応して保存量が存在する．

一般座標の変換（パラメータ σ）$q_\alpha(t) \to q_\alpha(t,\sigma) \quad (\, \alpha = 1, \ldots, n\,).$
（$q_\alpha(t, \sigma = 0) = q_\alpha(t)$ とする）

Noether（ネーター）の定理

Lagrangian L が座標変換 $q_\alpha(t) \to q_\alpha(t,\sigma)$ で不変，すなわち，

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} L(t, q(t,\sigma), \dot{q}(t,\sigma)) = 0$$

ならば，

$$\text{Noether charge} \quad Q := \frac{\partial L(t, q(t,\sigma), \dot{q}(t,\sigma))}{\partial \dot{q}_\alpha(t,\sigma)} \frac{\partial q^\alpha(t,\sigma)}{\partial\sigma}\bigg|_{\sigma=0}$$

は保存される．

Noether の定理

(証明) $q(\sigma) = q(t, \sigma)$ **と略記する.**

$$0 = \frac{\partial}{\partial \sigma} L(t, q(\sigma), \dot{q}(\sigma)) = \left(\frac{\partial q^\alpha}{\partial \sigma} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial \sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right)$$

$$= \left\{ \frac{\partial q^\alpha}{\partial \sigma} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial q^\alpha}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right),$$

$$\therefore \quad \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = \text{const.}$$

$\sigma = 0$ **とおくと Noether の定理を得る.**

■

Noether の定理：例

q_β が循環座標なら，

$$q_\alpha(t,\sigma) = \begin{cases} q_\beta(t) + \sigma & \alpha = \beta \\ q_\alpha(t) & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

とおくと，

$$Q = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \underbrace{\frac{\partial q_\alpha}{\partial \sigma}}_{\delta_{\alpha\beta}} = p_\beta \quad \therefore \quad p_\beta = \text{const.}$$

$$\left(\delta_{\alpha\beta} := \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta) \end{cases} \quad \text{Kronecker のデルタ} \right).$$

運動量保存則は Noether の定理に含まれる．

Noether の定理：例

一粒子系，三次元球座標，中心力による運動

座標系をある一定の単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ の回りに角 θ 回転する．
Lagrangian L は座標系の回転で不変である．
$\boldsymbol{r}$：旧座標系での位置ベクトル，$\boldsymbol{r}(\theta)$：新座標系での位置ベクトル．
$\delta\theta \approx 0$，$\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\delta\theta) - \boldsymbol{r}$ とおくと，

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{r}(\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = \frac{\delta \boldsymbol{r}}{\delta\theta} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{e},$$

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}$$

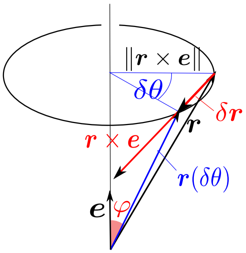
$$= \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{e}) \quad （\boldsymbol{p}：\text{初等力学の運動量}）$$

$$(\,\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \quad \text{を用いて})$$

$$= -\boldsymbol{e} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})$$

$$= -\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{l} = \text{const.} \quad （\boldsymbol{l}：\text{初等力学の角運動量}）.$$

$$\boldsymbol{e} \text{ は任意だから} \quad \boldsymbol{l} = \text{const.}$$



$$\|\delta\boldsymbol{r}\| = (\|\boldsymbol{r}\| \sin\varphi)\delta\theta = \|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{e}\|\delta\theta,$$

$$\delta\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{e})\delta\theta.$$

∴角運動量保存則が得られた．

今回の内容

まとめ

- Hamilton の原理：解析力学の第一原理…変分原理．
- 共変ベクトル：コベクトルの成分である．
- エネルギー・運動量
  - エネルギー保存則．
  - 一般化運動量．共変ベクトルである．
  - 運動量保存則：初等力学における運動量保存則・各運動量保存則を統一して扱う．
  - エネルギーは時間に対応する運動量と見なせる．
- Noether の定理

  物理系が不変性（対称性）を持てば，それに対応する保存量が存在する．