解析力学 (3)

幾何学的視点から

緒方秀教

電気通信大学大学院　情報・ネットワーク工学専攻

December 29, 2021

はじめに

Hamilton 形式の解析力学．

- Legendre 変換→ Hamiltonian
- 運動方程式：Hamilton 正準方程式（1 階微分方程式）
  Lagrange 運動方程式は 2 階微分方程式．
- 相空間：座標& 運動量を座標にもつ空間で考える．
- 正準変換．

この先は，微分幾何の準備をしてから話す．

今回の内容

今回の内容

（準備）Legendre 変換

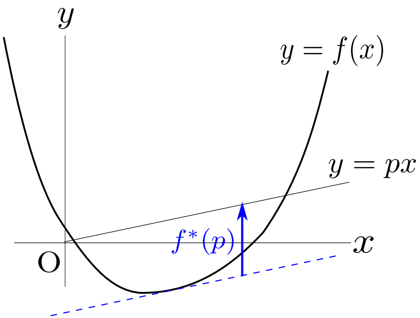
Legendre 変換

凸関数 $f(x)$ の Legendre 変換.

$$f^*(p) := \sup_x \{px - f(x)\}.$$

$*$ $f(x)$ は凸関数である.

$$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x)$$
$$(\, 0 < \forall\lambda < 1,\ \forall x, y\,).$$



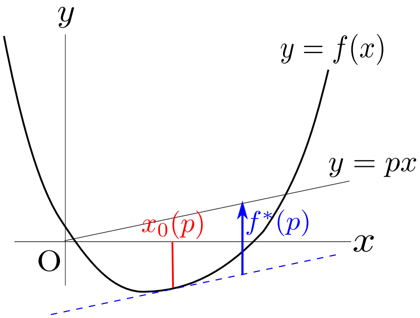
Legendre 変換

（準備）Legendre 変換

Legendre 変換

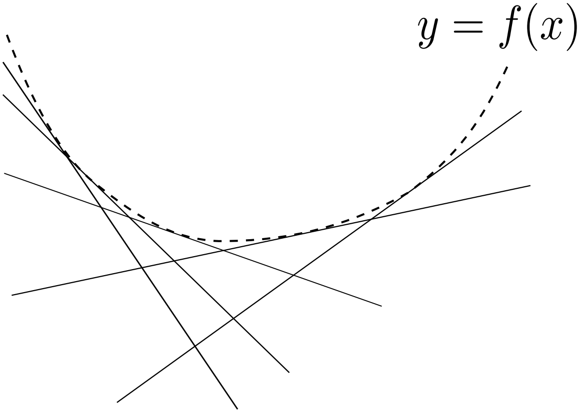
$f(x)$ が微分可能な凸関数ならば，

$$f^*(p) = px_0(p) - f(x_0(p)),$$
$$x_0(p)\ :\ p = f'(x)\ \text{の逆関数},\ \text{i.e.},\ \ f'(x_0(p)) = p.$$



（準備）Legendre 変換

Legendre 変換 $f^*(p)$ はもとの関数 $f(x)$ の情報を保持している．



直線群 $y = px - f^*(p)$：$y = f(x)$ の包絡線．

Hamilton 正準方程式

解析力学の話に戻る．

Hamiltonian（Hamilton 関数）

$$
\begin{aligned}
H(q,p,t) &:= H(q^1,\ldots,q^N,p_1,\ldots,p_N,t)\\
&= p_\alpha \dot{q}^\alpha(t,q,p) - L(q,\dot{q}(q,p),t)
\end{aligned}
$$

Lagrangian $L(q,\dot{q},t)$ ($\alpha = 1,\ldots,N$) の $\dot{q}^\alpha$ に関する Legendre 変換．

$\dot{q}^\alpha(q,p,t)$ ($\alpha = 1,\ldots,N$) : $p_\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}(q,\dot{q},t)$ を $\dot{q}^\alpha$ について解いて得られる関数．

Hamilton 正準方程式

$$H(t,q,p)=p_\alpha \dot{q}^\alpha(q,p,t)-L(t,q,\dot{q}(t,q,p)).$$

$$\mathrm{d}H=p_\alpha \mathrm{d}\dot{q}^\alpha+\dot{q}^\alpha \mathrm{d}p_\alpha-\left(\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\mathrm{d}q_\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\mathrm{d}\dot{q}^\alpha\right)$$

（Lagrange 運動方程式と $p_\alpha=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}$ により）

$$=p_\alpha \mathrm{d}\dot{q}^\alpha+\dot{q}^\alpha \mathrm{d}p_\alpha-\left(\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t+\dot{p}_\alpha \mathrm{d}q_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{N}p_\alpha \mathrm{d}\dot{q}^\alpha\right)$$

$$=\dot{q}^\alpha \mathrm{d}p_\alpha-\dot{p}_\alpha \mathrm{d}q^\alpha-\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t.$$

これと次とを比較する．

$$\mathrm{d}H=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\mathrm{d}p_\alpha+\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\mathrm{d}q^\alpha+\frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t.$$

Hamilton 正準方程式

Hamilton 正準方程式

Hamilton 形式における運動方程式.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H(t,q,p)}{\partial p_\alpha}, \\ \frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial H(t,q,p)}{\partial q^\alpha} \end{aligned}\right\} \quad (\,\alpha = 1,\ldots n\,).$$

Hamilton 正準方程式

Lagrangian L が t を陽に含まないとき，

$$E = p_\alpha q^\alpha - L = \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - L$$

はエネルギーであり，保存量であった．

$$H = p_\alpha \dot{q}^\alpha - L, \quad p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \quad (\alpha = 1, \ldots, n).$$

L が t を陽に含まないとき，Hamiltonian H はエネルギーに他ならない．

H が t を陽に含まないとき，$q^\alpha(t), p_\alpha(t)$ が Hamilton 正準方程式の解ならば，$H(q(t), p(t)) =$ const. である．

$$\because \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \dot{q}^\alpha \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + \dot{p}_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = 0.$$

Hamilton 正準方程式

- **一粒子系の三次元運動，Cartesian 座標．**

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(t, x, y, z).$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}.$$

$$\begin{aligned} H &= p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L \\ &= p_x \cdot \frac{p_x}{m} + p_y \cdot \frac{p_y}{m} + p_z \cdot \frac{p_z}{m} - \left\{ \frac{m}{2}\left[\left(\frac{p_x}{m}\right)^2 + \left(\frac{p_y}{m}\right)^2 + \left(\frac{p_z}{m}\right)^2 \right] - U(t, x, y, z) \right\}, \end{aligned}$$

$$\therefore \quad H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(t, x, y, z) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + U(t, \boldsymbol{r}).$$

Hamilton 正準方程式

- 一粒子系の中心力による二次元運動，極座標．

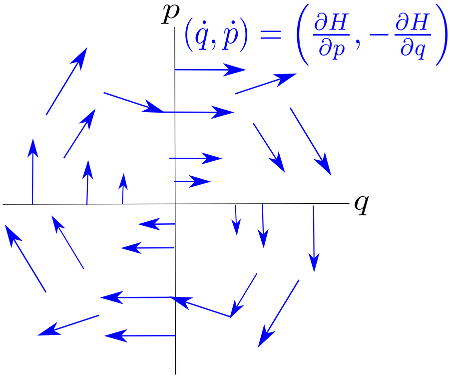
$$
\begin{gathered}
L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(t, r), \\
p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\theta, \\
\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \\
H = p_r\frac{p_r}{m} + p_\theta\frac{p_\theta}{mr^2} - \left\{ \frac{m}{2}\left[\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 - r^2\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right)^2 \right] + U(t, r) \right\}. \\
\therefore \quad H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + U(t, r).
\end{gathered}
$$

Hamilton 正準方程式

相空間 (phase space)：Hamilton 力学の舞台

$(q^1, \ldots, q^N, p_1, \ldots, p_N)$ を座標に持つ $2n$ 次元空間．

$*$ 物理では「位相空間」とよぶことが多いが， 数学でいう位相空間 (topological space) とは全く別物である．



相空間内の運動

Hamiltonian H は t に陽に依存しないとする．

自由度 $N = 1$.

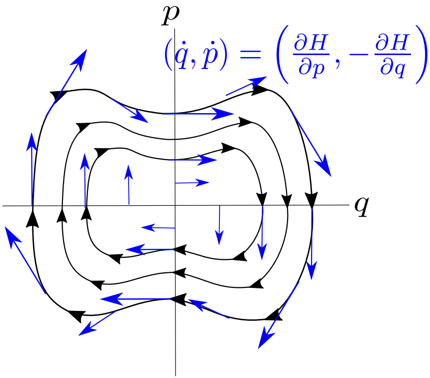
- 正準方程式の解 $(q(t), p(t))$ に沿って $H =$ const.
- $H(q, p)$ の等高線に沿って物理系は運動する．
- Hamilton 正準方程式は 1 階微分方程式．
  相空間内で運動を追跡できる．

Hamilton 正準方程式

相空間 (phase space)：Hamilton 力学の舞台

$(q^1, \ldots, q^N, p_1, \ldots, p_N)$ を座標に持つ $2n$ 次元空間.

$*$ 物理では「位相空間」とよぶことが多いが， 数学でいう位相空間 (topological space) とは全く別物である.



相空間内の運動

Hamiltonian H は t に陽に依存しないとする.

自由度 $N = 1$.

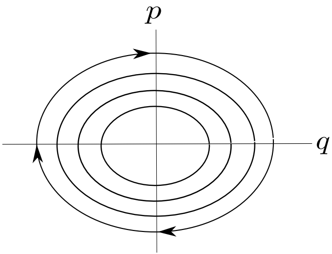
- 正準方程式の解 $(q(t), p(t))$ に沿って $H =$ const.
- $H(q, p)$ の等高線に沿って物理系は運動する.
- Hamilton 正準方程式は 1 階微分方程式.
  相空間内で運動を追跡できる.

Hamilton 正準方程式

（例）一次元調和振動子

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

物理系の相空間内の軌道（$H(q,p)$ の等高線）は楕円である．



Hamilton 正準方程式

Hamilton 正準方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m} \\ \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q. \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p}{m}\right) = \frac{1}{m}(-m\omega^2 q) = -\omega^2 q,$$

時間原点を適当に取れば， $q(t) = A\cos\omega t$ （ A : const.).

$$p(t) = m\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = -\omega m A \sin\omega t.$$

$$\therefore \quad (q(t), p(t)) = (A\cos\omega t, -\omega m A\sin\omega t).$$

相空間内の解軌道は楕円である．

今回の内容

正準変換：Hamilton 形式力学における Hamilton の原理

Lagrange 形式の力学は，変分原理（Hamilton の原理）が出発点だった．
Hamilton 形式の力学ではどうなのか？

正準変換：Hamilton 形式力学における Hamilton の原理

Lagrange 形式の力学は，変分原理（Hamilton の原理）が出発点だった．
Hamilton 形式の力学ではどうなのか？

Hamilton 形式における作用．

$$S[q,p]=\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}} L(t,q,p)\mathrm{d}t=\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}}\left\{p_\alpha \dot{q}^\alpha(q,p,t)-H(q,p,t)\right\}\mathrm{d}t.$$

Hamilton の原理：$\delta S=0$ （$q^\alpha(t)$ を $t=t_{\mathrm{I}},t_{\mathrm{F}}$ で固定）
→ Hamilton 正準方程式が得られる．

正準変換：Hamilton 形式力学における Hamilton の原理

$$\delta S = \int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} \left\{ \left(p_\alpha \delta \dot{q}^\alpha + \dot{q}^\alpha \delta p_\alpha \right) - \left(\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha \right) \right\} \mathrm{d}t$$

（部分積分により）

$$= \underbrace{\Big[p_\alpha \delta q^\alpha \Big]_{t=t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}}}_{0\ (\because\ \delta q^\alpha(t_\mathrm{I}) = q^\alpha(t_\mathrm{F}) = 0)} + \int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} \left\{ \left(\dot{q}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha - \left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \right) \delta q^\alpha \right\} \mathrm{d}t$$

$$= 0.$$

$$\int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} \left\{ \left(\dot{q}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha - \left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \right) \delta q^\alpha \right\} \mathrm{d}t = 0$$

$$\text{for} \quad \forall \delta q^\alpha \text{ s.t. } \delta q^\alpha(t_\mathrm{I}) = \delta q^\alpha(t_\mathrm{F}) = 0 \quad \text{and} \quad \forall \delta p_\alpha.$$

$$\therefore \quad \dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,).$$

Hamilton 正準方程式が得られた．

正準変換

正準変数（一般座標・一般運動量）の変換

$$(q,p)=(q^1,\dots,q^N,p_1,\dots,p_N)\mapsto(Q,P)=(Q^1,\dots,Q^N,P_1,\dots,P_N),$$

$$\left.\begin{aligned} Q^\alpha &= Q_\alpha(q,p,t)=Q^\alpha(q^1,\dots,q^N,p_1,\dots,p_N,t)\\ P_\alpha &= P_\alpha(q,p,t)=P_\alpha(q^1,\dots,q^N,p_1,\dots,p_N,t)\end{aligned}\right\}\quad(\,\alpha=1,\dots,N\,).$$

（注意）座標，運動量をひとまとめに変換することを考えている．

$*$ 点変換：座標のみの変換 $q^\alpha=q^\alpha(Q^1,\dots,Q^N,t)$ $(\,\alpha=1,\dots,N\,)$.

新しい正準変数も正準方程式を満たすような変換が望ましい，
i.e., 旧変数 (q,p) が Hamilton 正準方程式を満たせば，ある関数 $K(t,Q,P)$ が存在して，
新変数 (Q,P) も次式を満たす：

$$\dot{Q}^\alpha=\frac{\partial K}{\partial P_\alpha},\quad \dot{P}_\alpha=-\frac{\partial K}{\partial Q^\alpha}\quad(\,\alpha=1,\dots,N\,).$$

どうすれば，このような変換が得られるか？

正準変換

正準方程式 $\Leftrightarrow$ Hamilton の原理 ($\delta S = 0$) より

$$\delta \int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} \{p_\alpha \dot{q}^\alpha - H(q,p,t)\}\,\mathrm{d}t = 0 \;\Leftrightarrow\; \delta \int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} \left\{P_\alpha \dot{Q}^\alpha - K(Q,P,t)\right\}\mathrm{d}t = 0 \tag{1}$$

が成り立てばよい．どのようなときに成り立つか？

ある関数 $W(q,Q,t) = W(q^1,\dots,q^N,Q^1,\dots,Q^N,t)$ が存在して，

$$p_\alpha \dot{q}^\alpha - H(q,p,t) = P_\alpha \dot{Q}^\alpha - K(Q,P,t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(q,Q,t)$$

が成り立つとする．このとき，

$$\int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} (p_\alpha \dot{q}^\alpha - H)\,\mathrm{d}t = \int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} \left(P_\alpha \dot{Q}^\alpha - K\right)\mathrm{d}t + \Big[W(t,q(t),Q(t))\Big]_{t=t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}}.$$

変分をとる時，時間端点 $t = t_\mathrm{I}, t_\mathrm{F}$ で座標 q^α, Q^α は固定するので，右辺第 2 項からの寄与は消える．

ゆえに，(1) が成り立つ．

正準変換

$$
p_\alpha \dot{q}^\alpha - H(q,p,t) = P_\alpha \dot{Q}^\alpha - K(Q,P,t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W(q,Q,t),
$$
$$
\mathrm{d}W = p_\alpha \mathrm{d}q^\alpha - P_\alpha \mathrm{d}Q^\alpha + (K-H)\mathrm{d}t.
$$

これと

$$
\mathrm{d}W = \frac{\partial W}{\partial q^\alpha}\mathrm{d}q^\alpha + \frac{\partial W}{\partial Q^\alpha}\mathrm{d}Q^\alpha + \frac{\partial W}{\partial t}\mathrm{d}t
$$

とを比較して，次を得る．

正準変換

$$p_\alpha \dot{q}^\alpha - H(q,p,t) = P_\alpha \dot{Q}^\alpha - K(Q,P,t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W(q,Q,t),$$
$$\mathrm{d}W = p_\alpha \mathrm{d}q^\alpha - P_\alpha \mathrm{d}Q^\alpha + (K - H)\mathrm{d}t.$$

これと

$$\mathrm{d}W = \frac{\partial W}{\partial q^\alpha}\mathrm{d}q^\alpha + \frac{\partial W}{\partial Q^\alpha}\mathrm{d}Q^\alpha + \frac{\partial W}{\partial t}\mathrm{d}t$$

とを比較して，次を得る．

正準変換 (canonical transform)

$$(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_N) \mapsto (Q^1, \dots, Q^N, P_1, \dots, P_N),$$
$$p_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q^\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial W}{\partial Q^\alpha} \quad (\,\alpha = 1, \dots, N\,), \quad K = H + \frac{\partial W}{\partial t}.$$

$W(q,Q,t) = W(q^1, \dots, q^N, Q^1, \dots, Q^N, t)$ ：正準変換の母関数 (generating function).

正準変換

正準変換の母関数は，q, Q を独立変数に持つものとは限らない．

Legendre **変換で独立変数を入れ換える．**

$$W_1(q, P, t) = W(q, Q, t) + P_\alpha Q^\alpha .$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W_1 &= \mathrm{d}W + \mathrm{d}(P_\alpha Q^\alpha) \\ &= p_\alpha \mathrm{d}q^\alpha - P_\alpha \mathrm{d}Q^\alpha + (K - H)\mathrm{d}t + P_\alpha \mathrm{d}Q^\alpha + Q^\alpha \mathrm{d}P_\alpha \\ &= p_\alpha \mathrm{d}q^\alpha + Q^\alpha \mathrm{d}P_\alpha + (K - H)\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \mathrm{d}W_1 = p_\alpha \mathrm{d}q^\alpha + Q^\alpha \mathrm{d}P_\alpha + (K - H)\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}W_1 = \dfrac{\partial W_1}{\partial q^\alpha}\mathrm{d}q^\alpha + \dfrac{\partial W_1}{\partial P_\alpha}\mathrm{d}P_\alpha + \dfrac{\partial W_1}{\partial t}\mathrm{d}t. \end{cases}$$

両者を比較して，次の正準変換の公式を得る．

正準変換（2）

$W_1(q, P, t)$ **を母関数とする正準変換**

$$p_\alpha = \frac{\partial W_1}{\partial q^\alpha}, \quad Q^\alpha = \frac{\partial W_1}{\partial P_\alpha} \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,), \quad K = H + \frac{\partial W_1}{\partial t}.$$

正準変換：例

- $W_1(q,P) = q^\alpha P_\alpha$.

$$p_\alpha = \frac{\partial W_1}{\partial q^\alpha} = P_\alpha, \quad Q^\alpha = \frac{\partial W_1}{\partial P_\alpha} = q^\alpha,$$
$$\therefore \quad Q^\alpha = q^\alpha, \quad P_\alpha = p_\alpha \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,).$$

恒等変換は正準変換である．

- $W(q,Q) = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{N} q^\alpha Q^\alpha$.

$$p_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q^\alpha} = Q^\alpha, \quad P_\alpha = -\frac{\partial W}{\partial Q^\alpha} = -q^\alpha,$$
$$Q^\alpha = p_\alpha, \quad P_\alpha = -q^\alpha \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,).$$

座標と運動量の入れ替えは正準変換である．
Hamilton 形式の力学では，座標と運動量は同等の変数とみなす．

正準変換：例

- 点変換 $q^\alpha \to Q^\alpha = f^\alpha(q,t)$ は正準変換である．
  正準変換は，Lagrange 形式の力学における標準的な変数変換である点変換を含む．

$$W_1(q,P) = P_\alpha f^\alpha(q,t).$$

$$p_\alpha = \frac{\partial W_1}{\partial q^\alpha} = P_\beta \frac{f^\beta(q,t)}{\partial q^\alpha}, \quad Q^\alpha = \frac{\partial W_1}{\partial P_\alpha} = f^\alpha(q,t) \quad (\,\alpha = 1,\dots,N\,).$$

正準変換：例

＊ 早田次郎「現代物理のための解析力学」（サイエンス社，2006 年）より引用．

- 一次元調和振動子．

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2.$$

正準変換

$$Q = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}q + \mathrm{i}\frac{p}{\sqrt{2m\omega}}, \quad P = \mathrm{i}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}}q - \mathrm{i}\frac{p}{\sqrt{2m\omega}}\right), \quad K = H,$$

母関数 $W(q, Q) = \mathrm{i}\left(\frac{Q^2}{2} - \sqrt{2m\omega}qQ + \frac{m\omega^2}{2}q^2\right).$

$$\Downarrow$$

$$H = -\mathrm{i}\omega QP.$$

正準方程式 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\omega Q, \quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\omega P, \quad \therefore \quad Q(t) = Q(t=0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \quad P(t) = P(t=0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$

正準変換：例

- **一次元調和振動子（続）．**
  新変数 Q, P は量子力学の生成消滅演算子に対応する．

$$\widehat{a} = \frac{\widehat{Q}}{\sqrt{\hbar}} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\widehat{q} + \frac{\mathrm{i}\widehat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \qquad \text{消滅演算子},$$

$$\widehat{a}^{\dagger} = -\mathrm{i}\frac{\widehat{P}}{\sqrt{\hbar}} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\widehat{q} - \frac{\mathrm{i}\widehat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \qquad \text{生成演算子},$$

エネルギー $\hbar\omega$ の粒子を 1 個つくる／消す．
量子力学の正準交換関係 $[\widehat{q}, \widehat{p}] = \mathrm{i}\hbar$ を用いて，

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 = \hbar\omega\left(\widehat{a}^{\dagger}\widehat{a} + \frac{1}{2}\right),$$

$$[\widehat{a}, \widehat{a}^{\dagger}] = \widehat{1}.$$

正準変換：例

＊ 山本義隆・中村孔一「解析力学 I」（朝倉書店，1998 年）より引用．

減衰振動：運動方程式

$$m\ddot{q} + 2m\gamma\dot{q} + m\omega_0^2 q^2 = 0,$$

$$m \ : \text{質量}, \quad \omega_0,\ \gamma \ : \text{const.} \quad (\,\omega_0 > \gamma > 0\,).$$

Lagrangian $\quad L = \dfrac{m}{2}\mathrm{e}^{2\gamma t}(\dot{q}^2 - \omega_0^2 q^2),$

運動量 $\quad p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\mathrm{e}^{2\gamma t}\dot{q},$

Hamiltonian $\quad H = p\dot{q} - L$

$$= p \cdot \frac{1}{m}\mathrm{e}^{-2\gamma t}p - \frac{m}{2}\mathrm{e}^{2\gamma t}\left\{\left(\frac{1}{m}\mathrm{e}^{-2\gamma t}p\right)^2 - \omega_0^2 q^2,\right\}$$

$$\therefore \quad H = \frac{1}{2m}\mathrm{e}^{-2\gamma t}p^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\mathrm{e}^{2\gamma t}q^2.$$

正準変換：例

Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2m}\mathrm{e}^{-2\gamma t}p^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\mathrm{e}^{2\gamma t}q^2.$$

正準変換 $(q,p) \to (Q,P)$ **(母関数** $W_1(q,P,t) = qP\mathrm{e}^{\gamma t}$**) を施す．**

$$Q = \frac{\partial W_1}{\partial P} = q\mathrm{e}^{\gamma t}, \quad p = \frac{\partial W_1}{\partial q} = P\gamma e^{\gamma t},$$

$$\therefore \quad Q = \mathrm{e}^{\gamma t}q, \quad P = \mathrm{e}^{-\gamma t}p,$$

$$K = H + \frac{\partial W_1}{\partial t} = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 Q^2 + \gamma QP.$$

K **は** t **を陽に含まないので，**K **自体が保存量である．**

K **を** q,p **で表すと，**

$$K = \frac{1}{2m}\mathrm{e}^{-2\gamma t}p^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\mathrm{e}^{2\gamma t}q^2 + \gamma qp = \text{const}.$$

これはエネルギーではない．

正準変換：例

$$K = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 Q^2 + \gamma QP.$$

Hamilton 正準方程式．

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial K}{\partial Q}.$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \gamma Q + \frac{1}{m}P, \quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -m\omega_0^2 Q - \gamma P.$$

P を消去すると，

$$\ddot{Q} + \omega^2 Q = 0 \quad \left(\, \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, \right).$$

減衰項（空気抵抗）が消えている！

解　$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \theta_0) \quad (\, Q_0, \theta_0 \ : \ \text{const.}\,),$

$$q = Q_0 \mathrm{e}^{-\gamma t} \cos(\omega t + \theta_0).$$

正準変換：無限小正準変換

恒等変換からわずかにずれた正準変換 $(q, p) \mapsto (q_\epsilon, p^\epsilon)$ ($\epsilon \approx 0$)．

$$\text{母関数}\quad W_1(q, p^\epsilon) = q^\alpha p^\epsilon_\alpha + \epsilon G(q, p^\epsilon).$$

$$\Downarrow$$

$$p_\alpha = \frac{\partial W_1}{\partial q^\alpha} = p^\epsilon_\alpha + \epsilon \frac{\partial G(q, p^\epsilon)}{\partial q^\alpha}, \quad q^\alpha_\epsilon = \frac{\partial W_1}{\partial p^\epsilon_\alpha} = q^\alpha + \epsilon \frac{\partial G(q, p^\epsilon)}{\partial p^\epsilon_\alpha},$$

高次の微小量を無視して，

無限小正準変換

$G(q, p) = G(q^1, \ldots, q^N, p_1, \ldots, p_N)$ を生成子とする無限小正準変換．

$$q^\alpha_\epsilon = q^\alpha + \epsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial p_\alpha}, \quad p^\epsilon_\alpha = p_\alpha - \epsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial q^\alpha}. \quad (\, \alpha = 1, \ldots, n,\ \epsilon \approx 0\,).$$

正準変換

$\epsilon \to \Delta\rho$, $q^\alpha \to q^\alpha(\rho)$, $p_\alpha \to p_\alpha(\rho)$, $q^\alpha_\epsilon \to q^\alpha(\rho+\Delta\rho)$, $p^\epsilon_\alpha \to p_\alpha(\rho+\Delta\rho)$ と書く．

$$\frac{q^\alpha(\rho+\Delta\rho)-q^\alpha(\rho)}{\Delta\rho} = \frac{\partial G(q,p)}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{p_\alpha(\rho+\Delta\rho)-p_\alpha(\rho)}{\Delta\rho} = -\frac{\partial G(q,p)}{\partial q^\alpha}.$$

$\Delta\rho \to 0$ として，

$G(q,p)$ を生成子とする正準変換

$$\frac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}\rho} = \frac{\partial G(q,p)}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}\rho} = -\frac{\partial G(q,p)}{\partial q^\alpha} \qquad (\ \alpha = 1,\dots,N\ )$$

$$\Downarrow$$

$$(q^\alpha, p_\alpha) = (q^\alpha(0), p_\alpha(0)) \ \to \ (q^\alpha(\rho), p_\alpha(\rho)).$$

正準変換

Hamiltonian $H(q,p)$ を生成子とする正準変換は何か？

$$\text{正準方程式}\quad \frac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha},\qquad \frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}.$$

$$\Downarrow$$

$$q^\alpha(0)\to q_\alpha(t),\quad p_\alpha(0)\to p_\alpha(t)\quad(\ \alpha=1,\ldots,N\ ).$$

Hamilton 正準方程式に従う時間発展は正準変換である.

今回の内容

まとめ

Hamilton 形式の解析力学．

- Legendre 変換により Hamilton 形式へ移行．
- Hamilton 正準方程式
  - Hamilton 形式における運動方程式．
  - 1 階微分方程式．
- 相空間 (phase space)：一般座標と一般運動量を座標にもつ空間．
- 正準変換：位相空間における標準的な変数変換．
  - 座標と運動量を同等な変数として扱う．
  - Hamilton 正準方程式に従う時間発展は正準変換である．

Hamilton 形式の力学は，力学の幾何学的側面をあらわにしている（不変性，保存量）．
その点を深く追求するため，次回では微分幾何の準備をする．