解析力学 (4)・解析力学のための幾何学

幾何学的視点から

緒方秀教

電気通信大学大学院　情報・ネットワーク工学専攻

January 2, 2022

はじめに

- 解析力学は座標（人間のモノサシ）の選び方で不変な力学の定式化である．
- Hamilton 形式の力学：力学の幾何学的側面をあらわにしている．
  幾何学：変換に対して不変なものを調べる学問．

今回の予定

解析力学の幾何学を究めるために，微分幾何の知識を準備する．

- 接ベクトル
- 微分形式
- くさび積
- 外微分
- 微分形式の積分（Stokes の定理）

今回の内容

1. はじめに
2. 接ベクトル・1 形式
3. 微分形式とくさび積
4. 外微分
5. 微分形式の積分
6. まとめ

今回の内容

1. はじめに
2. 接ベクトル・1 形式
3. 微分形式とくさび積
4. 外微分
5. 微分形式の積分
6. まとめ

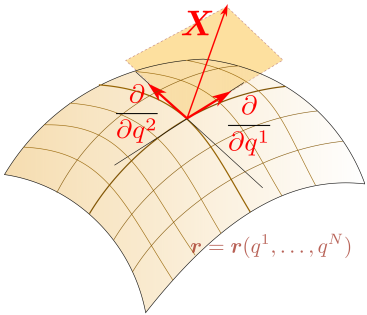
接ベクトル・1 形式：接ベクトル

配位空間：粒子系が運動する空間．

$$M := \left\{ \boldsymbol{r}(q^1, q^2, \ldots, q^N) \in \mathbb{R}^{3N_{\text{particle}}} \,\middle|\, (q^1, q^2, \ldots, q^N) \in D \right\} \quad (D \subset \mathbb{R}^N).$$

M 上の接ベクトル場

$$X = X^\alpha(q)\partial_\alpha = X^\alpha(q)\frac{\partial}{\partial q^\alpha} \quad \left(\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \right).$$



- 記号 "$\boldsymbol{r}$" は略する．$\partial \boldsymbol{r}/\partial q^\alpha \to \partial/\partial q^\alpha$.
  接ベクトル＝方向微分．
- Einstein の規約．

$$T^{\alpha\cdots} S_{\alpha\ldots} = \sum_{\alpha=1}^{N} T^{\alpha\cdots} S_{\alpha\ldots}.$$

接ベクトル・1 形式：1 形式

M 上の微分 1 形式，あるいは単に，1 形式

- M 上のコベクトル場 ω，i.e.，線形形式 $\omega : X$（ベクトル場）$\mapsto \langle \omega | X \rangle$（スカラー場）.
- 双対基底：$\{\mathrm{d}q^\alpha\}_{\alpha=1}^N$.

$$\langle \mathrm{d}q^\alpha | \partial_\beta \rangle = \delta^\alpha_\beta = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta). \end{cases}$$

1 形式の座標表示

$$\omega = \omega_\alpha(q)\mathrm{d}q^\alpha, \quad \omega_\alpha(q) = \langle \omega | \partial_\alpha \rangle \quad (\ \alpha = 1, \ldots, N\ ).$$

接ベクトル・1 形式：座標変換における変換則

座標変換（点変換）$(q^1, \ldots, q^N) \to (Q^1, \ldots, Q^N)$ における接ベクトル，1 形式の変換則．

$$X = X^\alpha(q)\frac{\partial}{\partial q^\alpha} = \widetilde{X}^\alpha(Q)\frac{\partial}{\partial Q^\alpha}, \quad \omega = \omega_\alpha(q)\mathrm{d}q^\alpha = \widetilde{\omega}_\alpha(Q)\mathrm{d}Q^\alpha.$$

$\frac{\partial}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\alpha}\frac{\partial}{\partial Q^\beta}$, $\mathrm{d}q^\alpha = \frac{\partial q^\alpha}{\partial Q^\beta}\mathrm{d}Q^\beta$ **を用いて，**

$$\widetilde{X}^\alpha(Q) = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta}X^\beta(q) \quad \textbf{反変ベクトル}, \quad \widetilde{\omega}_\alpha(Q) = \frac{\partial q^\beta}{\partial Q^\alpha}\omega_\beta(q) \quad \textbf{共変ベクトル}.$$

$$\langle\omega|X\rangle = X^\alpha(q)\omega_\alpha(q) = \widetilde{X}^\alpha(Q)\widetilde{\omega}_\alpha(Q) \quad \textbf{スカラー（座標変換で不変）}.$$

今回の内容

1. はじめに
2. 接ベクトル・1 形式
3. 微分形式とくさび積
4. 外微分
5. 微分形式の積分
6. まとめ

微分形式とくさび積：1 形式のくさび積

1 形式 ω, η のくさび積.

$$\omega \wedge \eta = (\omega_\alpha(q)\mathrm{d}q^\alpha) \wedge \left(\eta_\beta(q)\mathrm{d}q^\beta\right) := \omega_\alpha(q)\eta_\beta(q)\mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\beta.$$

くさび積 $\wedge$ のルール

- $\circ \wedge \bullet$ は $\circ, \bullet$ それぞれについて線形である.
- 反可換性：双対基底 $\{\mathrm{d}q^\alpha\}$ に対して，$\mathrm{d}q^\beta \wedge \mathrm{d}q^\alpha = -\mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\beta$, とくに，$\mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\alpha = 0.$

微分形式とくさび積：微分 2 形式，くさび積 $\wedge$ の演算例

（例） $N = 3$, $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$ **の場合．**
通常のベクトル $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ **に次の 1 形式を対応させる．**

$$\omega_a = a_x \mathrm{d}x + a_y \mathrm{d}y + a_z \mathrm{d}z, \quad \omega_b = b_x \mathrm{d}x + b_y \mathrm{d}y + b_z \mathrm{d}z.$$

微分形式とくさび積：微分 2 形式，くさび積 $\wedge$ の演算例

（例） $N = 3$, $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$ **の場合．**

通常のベクトル $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ **に次の 1 形式を対応させる．**

$$\omega_a = a_x \mathrm{d}x + a_y \mathrm{d}y + a_z \mathrm{d}z, \quad \omega_b = b_x \mathrm{d}x + b_y \mathrm{d}y + b_z \mathrm{d}z.$$

$$\begin{aligned}
\omega_a \wedge \omega_b &= (a_x \mathrm{d}x + a_y \mathrm{d}y + a_z \mathrm{d}z) \wedge (b_x \mathrm{d}x + b_y \mathrm{d}y + b_z \mathrm{d}z) \\
&= a_x b_x \underbrace{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x}_{0} + a_x b_y \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + a_x b_z \underbrace{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z}_{-\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x} + a_y b_x \underbrace{\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x}_{-\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y} + a_y b_y \underbrace{\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y}_{0} + a_y b_z \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&\quad + a_z b_x \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + a_z b_y \underbrace{\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y}_{-\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z} + a_z b_z \underbrace{\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z}_{0}
\end{aligned}$$

くさび積 $\wedge$ の反可換性を使う

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (a_z b_x - a_x b_z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (a_x b_y - a_y b_x)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

微分形式とくさび積：微分 2 形式，くさび積 $\wedge$ の演算例

（例） $N = 3$, $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$ **の場合．**

通常のベクトル $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ **に次の 1 形式を対応させる．**

$$\omega_a = a_x \mathrm{d}x + a_y \mathrm{d}y + a_z \mathrm{d}z, \quad \omega_b = b_x \mathrm{d}x + b_y \mathrm{d}y + b_z \mathrm{d}z.$$

$$\begin{aligned}\omega_a \wedge \omega_b &= (a_x \mathrm{d}x + a_y \mathrm{d}y + a_z \mathrm{d}z) \wedge (b_x \mathrm{d}x + b_y \mathrm{d}y + b_z \mathrm{d}z) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (a_z b_x - a_x b_z) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (a_x b_y - a_y b_x) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

ベクトルの外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ **の成分が現れた．**

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x).$$

微分形式とくさび積：2 形式

2 形式

$$\omega = \frac{1}{2!}\omega_{\alpha\beta}(q)\mathrm{d}q^{\alpha} \wedge \mathrm{d}q^{\beta}.$$

1 形式 ξ と 2 形式 ω のくさび積.

$$\xi \wedge \omega = (\xi_{\alpha}(q)\mathrm{d}q^{\alpha}) \wedge \left(\frac{1}{2!}\omega_{\beta\gamma}(q)\mathrm{d}q^{\beta} \wedge \mathrm{d}q^{\gamma}\right) := \frac{1}{2!}\xi_{\alpha}(q)\omega_{\beta\gamma}(q)\mathrm{d}q^{\alpha} \wedge \mathrm{d}q^{\beta} \wedge \mathrm{d}q^{\gamma}.$$

微分形式とくさび積：2 形式

2 形式

$$\omega = \frac{1}{2!}\omega_{\alpha\beta}(q)\mathrm{d}q^{\alpha} \wedge \mathrm{d}q^{\beta}.$$

1 形式 ξ と 2 形式 ω のくさび積.

$$\xi \wedge \omega = (\xi_{\alpha}(q)\mathrm{d}q^{\alpha}) \wedge \left(\frac{1}{2!}\omega_{\beta\gamma}(q)\mathrm{d}q^{\beta} \wedge \mathrm{d}q^{\gamma}\right) := \frac{1}{2!}\xi_{\alpha}(q)\omega_{\beta\gamma}(q)\mathrm{d}q^{\alpha} \wedge \mathrm{d}q^{\beta} \wedge \mathrm{d}q^{\gamma}.$$

3 形式 $\zeta = \frac{1}{3!}\zeta_{\alpha\beta\gamma}(q)\mathrm{d}q^{\alpha} \wedge \mathrm{d}q^{\beta} \wedge \mathrm{d}q^{\gamma}.$

微分形式とくさび積

1 形式 ξ と 3 形式 ω のくさび積．

$$\xi \wedge \omega = (\xi_\alpha(q)\mathrm{d}q^\alpha) \wedge \left(\frac{1}{3!}\omega_{\beta\gamma\delta}(q)\mathrm{d}q^\beta \wedge \mathrm{d}q^\gamma \wedge \mathrm{d}q^\delta\right) := \frac{1}{3!}\xi_\alpha(q)\omega_{\beta\gamma\delta}(q)\mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\beta \wedge \mathrm{d}q^\gamma \wedge \mathrm{d}q^\delta.$$

2 形式 η, ζ のくさび積．

$$\eta \wedge \zeta = \left(\frac{1}{2!}\eta_{\alpha\beta}(q)\mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\beta\right) \wedge \left(\frac{1}{2!}\zeta_{\gamma\delta}(q)\mathrm{d}q^\gamma \wedge \mathrm{d}q^\delta\right) := \frac{1}{(2!)^2}\eta_{\alpha\beta}(q)\zeta_{\gamma\delta}(q)\mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\beta \wedge \mathrm{d}q^\gamma \wedge \mathrm{d}q^\delta.$$

4 形式　$\zeta = \frac{1}{4!}\zeta_{\alpha\beta\gamma\delta}(q)\mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\beta \wedge \mathrm{d}q^\gamma \wedge \mathrm{d}q^\delta.$

以降，同様にして 5 形式，6 形式，…が作られる．

k 形式

$$\omega = \frac{1}{k!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(q)\mathrm{d}q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_k}.$$

微分形式とくさび積：計算例

$N = 3$, $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$ **の場合．**
通常のベクトル $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ **にそれぞれ次の** 1 **形式** ξ_a**，** 2 **形式** ω_b **を対応させる．**

$$\xi_a = a_x \mathrm{d}x + a_y \mathrm{d}y + a_z \mathrm{d}z, \quad \omega_b = b_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + b_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + b_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

$$\begin{aligned}
\xi_a \wedge \omega_b &= (a_x \mathrm{d}x + a_y \mathrm{d}y + a_z \mathrm{d}z) \wedge (b_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + b_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + b_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) \\
&= a_x b_x \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + a_x b_y \underbrace{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x}_{0} + a_x b_z \underbrace{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}_{0} \\
&\quad + a_y b_x \underbrace{\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z}_{0} + a_y b_y \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + a_y b_z \underbrace{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x}_{0} \\
&\quad + a_z b_x \underbrace{\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z}_{0} + a_z b_y \underbrace{\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x}_{0} + a_z b_z \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

くさび積は同じものが現れると 0 **になることを用いた．**
$\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ **などを用いて，**

微分形式とくさび積：計算例

$N = 3$, $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$ **の場合．**
通常のベクトル $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ **にそれぞれ次の** 1 **形式** ξ_a**，** 2 **形式** ω_b **を対応させる．**

$$\xi_a = a_x \mathrm{d}x + a_y \mathrm{d}y + a_z \mathrm{d}z, \quad \omega_b = b_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + b_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + b_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

$$\xi_a \wedge \omega_b = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ **が現れた．**

微分形式とくさび積

- $k > N$ なる k 形式は 0 しか存在しない．

  $\because \quad k > N$ の場合，$\mathrm{d}q^{\alpha_1}, \ldots, \mathrm{d}q^{\alpha_k}$ のどれか二つが必ず一致して $\mathrm{d}q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_k} = 0$ となるから．

- 2 形式 $\omega = \dfrac{1}{2!}\omega_{\alpha\beta}(q)\mathrm{d}q^{\alpha} \wedge \mathrm{d}q^{\beta}$ に対して，

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{2!}\sum_{\alpha<\beta}(\omega_{\alpha\beta}\mathrm{d}q^{\alpha} \wedge \mathrm{d}q^{\beta} + \omega_{\beta\alpha}\mathrm{d}q^{\beta} \wedge \mathrm{d}q^{\alpha} \\ &= \frac{1}{2!}\sum_{\alpha<\beta}(\omega_{\alpha\beta} - \omega_{\beta\alpha})\mathrm{d}q^{\alpha} \wedge \mathrm{d}q^{\beta}.\end{aligned}$$

係数は添字 α, β の入れ替えで符号が反転するものだけが残る．一般の k 形式も同様．

微分形式の係数は添字の入れ替えで符号が反転するとしておく．

$$\omega = \frac{1}{k!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(q)\mathrm{d}q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_k}, \quad \omega_{\ldots\beta\ldots\alpha\ldots}(q) = -\omega_{\ldots\alpha\ldots\beta\ldots}(q).$$

微分形式とくさび積

- 「1 形式＝コベクトル（線形形式）：ベクトルを投げるとスカラーを返す」だった．
- 2 形式 ω：双線型形式とするのが自然．

$$\omega : (X, Y) \mapsto \langle \omega | X, Y \rangle \text{（スカラー）}, \quad \text{ベクトル } X, Y \text{ それぞれについて線形.}$$

$\omega = \dfrac{1}{2!}\omega_{\alpha\beta} X^{\alpha\beta}$ とすると，

$$\langle \omega | X, Y \rangle = \frac{1}{2!}\omega_{\alpha\beta} \langle \mathrm{d}q^{\alpha} \wedge \mathrm{d}q^{\beta} | X, Y \rangle.$$

$\langle \mathrm{d}q^{\alpha} \wedge \mathrm{d}q^{\beta} | X, Y \rangle$ をどう定めるか？

微分形式とくさび積

仮に次のように定義してみる．

$$\langle \mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\beta | X, Y \rangle \stackrel{?}{=} \langle \mathrm{d}q^\alpha | X \rangle \langle \mathrm{d}q^\beta | Y \rangle.$$

くさび積 $\wedge$ の反可換性より，

$$\text{左辺} = -\langle \mathrm{d}q^\beta \wedge \mathrm{d}q^\alpha | X, Y \rangle = -\langle \mathrm{d}q^\beta | X \rangle \langle \mathrm{d}q^\alpha | Y \rangle,$$
$$\langle \mathrm{d}q^\alpha | X \rangle \langle \mathrm{d}q^\beta | Y \rangle = -\langle \mathrm{d}q^\beta | X \rangle \langle \mathrm{d}q^\alpha | Y \rangle \ !?$$

そこで，次のように定義し直す．

$$\langle \mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\beta | X, Y \rangle = \langle \mathrm{d}q^\alpha | X \rangle \langle \mathrm{d}q^\beta | Y \rangle - \langle \mathrm{d}q^\alpha | Y \rangle \langle \mathrm{d}q^\beta | X \rangle.$$

この時，

$$\text{左辺} = -\langle \mathrm{d}q^\beta \wedge \mathrm{d}q^\alpha | X, Y \rangle = -\langle \mathrm{d}q^\beta | X \rangle \langle \mathrm{d}q^\alpha | Y \rangle + \langle \mathrm{d}q^\beta | Y \rangle \langle \mathrm{d}q^\alpha | X \rangle = \text{右辺}.$$

矛盾は解消された．

微分形式とくさび積：2 形式

双線型形式としての 2 形式

$\omega = \dfrac{1}{2!}\omega_{\alpha\beta}(q)\mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\beta$ **は次を満たす双線型形式とする**

（ベクトル場 X, Y **を投げるとスカラー場** $\langle\omega|X,Y\rangle$ **を返す）．**

- $\langle\omega|X,Y\rangle$ **は** X, Y **それぞれについて線形である．**
- $\langle \mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\beta|X,Y\rangle = \langle \mathrm{d}q^\alpha|X\rangle\langle \mathrm{d}q^\beta|Y\rangle - \langle \mathrm{d}q^\alpha|Y\rangle\langle \mathrm{d}q^\beta|X\rangle$, **とくに，**

$$\langle \mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\beta|\partial_\gamma, \partial_\delta\rangle = \delta^\alpha_\gamma\delta^\beta_\delta - \delta^\alpha_\delta\delta^\beta_\gamma.$$

$$\langle\omega|X,Y\rangle = \frac{1}{2!}\omega_{\alpha\beta}X^\gamma Y^\delta\langle \mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\beta|\partial_\gamma,\partial_\delta\rangle = \frac{1}{2!}\omega_{\alpha\beta}(X^\alpha Y^\beta - Y^\alpha X^\beta),$$
$$\therefore \quad \langle\omega|Y,X\rangle = -\langle\omega|X,Y\rangle.$$

ω **は交代双線型形式である．**

微分形式とくさび積：k 形式

多重線型形式としての k 形式

$\omega = \dfrac{1}{k!}\omega_{\alpha_1\dots\alpha_k}(q)\mathrm{d}q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\alpha_k}$ は次を満たす k 重線型形式とする

（ベクトル場 $X_{(1)},\dots,X_{(k)}$ を投げるとスカラー場 $\langle\omega|X_{(1)},\dots,X_{(k)}\rangle$ を返す）.

- $\langle\omega|X_{(1)},\dots,X_{(k)}\rangle$ は $X_{(1)},\dots,X_{(k)}$ それぞれについて線形である.
- $\langle\mathrm{d}q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\alpha_k}|\partial_{\beta_1},\dots,\partial_{\beta_k}\rangle = \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}(\operatorname{sgn}\sigma)\delta^{\alpha_{\sigma(1)}}_{\beta_1}\cdots\delta^{\alpha_{\sigma(k)}}_{\beta_k}$.

$\mathfrak{S}_k$：$(1,2,\dots,k)$ の置換の集合（k 次の対称群）.

$$\operatorname{sgn}\sigma = \begin{cases} +1 & (\sigma \text{ は偶置換}) \\ -1 & (\sigma \text{ は奇置換}). \end{cases}$$

微分形式とくさび積：k 形式

多重線型形式としての k 形式

$\omega = \dfrac{1}{k!}\omega_{\alpha_1\dots\alpha_k}(q)\mathrm{d}q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\alpha_k}$ は次を満たす k 重線型形式とする

（ベクトル場 $X_{(1)},\dots,X_{(k)}$ を投げるとスカラー場 $\langle\omega|X_{(1)},\dots,X_{(k)}\rangle$ を返す）.

- $\langle\omega|X_{(1)},\dots,X_{(k)}\rangle$ は $X_{(1)},\dots,X_{(k)}$ それぞれについて線形である.
- $\langle\mathrm{d}q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\alpha_k}|\partial_{\beta_1},\dots,\partial_{\beta_k}\rangle = \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}(\operatorname{sgn}\sigma)\delta^{\alpha_{\sigma(1)}}_{\beta_1}\cdots\delta^{\alpha_{\sigma(k)}}_{\beta_k}$.

$$\langle\omega|X_{(1)},\dots,X_{(k)}\rangle = \frac{1}{k!}\omega_{\alpha_1\dots\alpha_k}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}(\operatorname{sgn}\sigma)X^{\alpha_{\sigma(1)}}_{(1)}\cdots X^{\alpha_{\sigma(k)}}_{(k)}.$$

ω は交代 k 重線形形式である（$X_{(1)},\dots,X_{(k)}$ の 2 個を入れ替えると符号を変える）.

微分形式とくさび積：計算例

$N = 3$, $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$.

ベクトル $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ に次の 2 形式 ω を対応させる．

$$\omega = \omega_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \omega_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \omega_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ にそれぞれ次のベクトル X_a, X_b を対応させる．

$$X_a = a_x\partial_x + a_y\partial_y + a_z\partial_z. \quad X_b = b_x\partial_x + b_y\partial_y + b_z\partial_z.$$

$$\begin{aligned}
\langle \omega | X_a, X_b \rangle &= \omega_x \langle \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z | a_x\partial_x + a_y\partial_y + a_z\partial_z, b_x\partial_x + b_y\partial_y + b_z\partial_z \rangle \\
&\quad + \omega_y \langle \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x | a_x\partial_x + a_y\partial_y + a_z\partial_z, b_x\partial_x + b_y\partial_y + b_z\partial_z \rangle \\
&\quad + \omega_z \langle \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y | a_x\partial_x + a_y\partial_y + a_z\partial_z, b_x\partial_x + b_y\partial_y + b_z\partial_z \rangle \\
&= \omega_x(a_yb_z - a_zb_y) + \omega_y(a_zb_x - a_xb_z) + \omega_z(a_xb_y - a_yb_x) \\
&= \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).
\end{aligned}$$

微分形式とくさび積：計算例

$N = 3$, $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$.

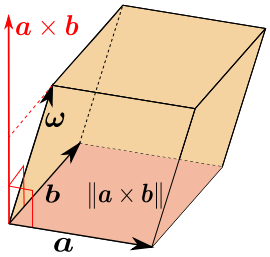
ベクトル $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ に次の 2 形式 ω を対応させる．

$$\omega = \omega_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \omega_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \omega_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ にそれぞれ次のベクトル X_a, X_b を対応させる．

$$X_a = a_x \partial_x + a_y \partial_y + a_z \partial_z. \quad X_b = b_x \partial_x + b_y \partial_y + b_z \partial_z.$$

$$\begin{aligned} \langle \omega | X_a, X_b \rangle &= \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ の張る平行六面体の体積} \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \text{ の張る平行四辺形の} \\ \text{面積ベクトル} \end{array} \right). \end{aligned}$$



微分形式とくさび積：微分形式の変換則

座標変換（点変換） $(q^\alpha) \to (Q^\alpha)$ **に対し，**

$$\omega = \frac{1}{k!}\omega_{\alpha_1\dots\alpha_k}(q)\mathrm{d}q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\alpha_k} = \frac{1}{k!}\widetilde{\omega}_{\alpha_1\dots\alpha_k}(Q)\mathrm{d}Q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}Q^{\alpha_k},$$

$\mathrm{d}q^\alpha = \dfrac{\partial q^\alpha}{\partial Q^\beta}\mathrm{d}Q^\beta$ **を用いて，**

$$\widetilde{\omega}_{\alpha_1\dots\alpha_k}(Q) = \omega_{\beta_1\dots\beta_k}(q)\frac{\partial q^{\beta_1}}{\partial Q^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial q^{\beta_k}}{\partial Q^{\beta_k}} \quad k \text{ 階共変テンソル場},$$

ベクトル場 $X_{(1)},\dots,X_{(k)}$ **に対し，**

$$\langle\omega|X_{(1)},\dots,X_{(k)}\rangle = \omega_{\alpha_1\dots\alpha_k}(q)X^{\alpha_1}_{(1)}(q)\cdots X^{\alpha_k}_{(k)}(q) = \widetilde{\omega}_{\alpha_1\dots\alpha_k}(Q)\widetilde{X}^{\alpha_1}_{(1)}(Q)\cdots X^{\alpha_k}_{(k)}(Q).$$

変数変換で不変である（スカラー）．

今回の内容

1. はじめに
2. 接ベクトル・1 形式
3. 微分形式とくさび積
4. 外微分
5. 微分形式の積分
6. まとめ

外微分

微分形式の微分.

k 形式 ω の外微分 $\mathrm{d}\omega$

- **関数（0 形式）** f **の外微分**

$$\mathrm{d}f = \partial_\alpha f(q)\mathrm{d}q^\alpha \quad \text{（1 形式）}$$

- k **形式** $\omega = \dfrac{1}{k!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(q)\mathrm{d}q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\alpha_k}$ **の外微分** $\mathrm{d}\omega$

$$\mathrm{d}\omega := \frac{1}{k!}\partial_\beta\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(q)\mathrm{d}q^\beta\wedge\mathrm{d}q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\alpha_k} \quad \text{（}(k+1)\text{ 形式）.}$$

外微分（$N = 3$, ベクトル解析との関連）

（例） $N = 3$, $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$.

$$\mathrm{d}f = \partial_x f \mathrm{d}x + \partial_y f \mathrm{d}y + \partial_z f \mathrm{d}z \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{grad}\, f = \nabla f = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f) \quad (\, \nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\,)\,.$$

外微分（$N = 3$, ベクトル解析との関連）

（例） $N = 3$, $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$.

$$\mathrm{d}f = \partial_x f \mathrm{d}x + \partial_y f \mathrm{d}y + \partial_z f \mathrm{d}z \quad \leftrightarrow \quad \operatorname{grad} f = \nabla f = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f) \quad (\ \nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\ ).$$

1 形式 $\omega_A = A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z$ **に対し，**

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega_A = {} & (\partial_x A_x \mathrm{d}x + \partial_x A_x \mathrm{d}y + \partial_z A_x \mathrm{d}z) \wedge \mathrm{d}x + (\partial_x A_y \mathrm{d}x + \partial_y A_y \mathrm{d}y + \partial_z A_y \mathrm{d}z) \wedge \mathrm{d}y \\
& + (\partial_x A_z \mathrm{d}x + \partial_y A_z \mathrm{d}y + \partial_z A_z \mathrm{d}z) \wedge \mathrm{d}z \\
& (\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0 \text{ etc. により赤字の項は消えて}\ ) \\
= {} & \partial_y A_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \partial_z A_x \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \partial_x A_y \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \partial_z A_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y + \partial_x A_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \partial_y A_z \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
& (\ \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \text{ etc. により青字の符号を反転させて}\ ) \\
= {} & (\partial_y A_z - \partial_z A_y)\, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (\partial_z A_x - \partial_x A_z)\, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (\partial_x A_y - \partial_y A_x)\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

外微分（$N = 3$, ベクトル解析との関連）

（例） $N = 3$, $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$.

$$\mathrm{d}f = \partial_x f \mathrm{d}x + \partial_y f \mathrm{d}y + \partial_z f \mathrm{d}z \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{grad}\, f = \nabla f = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f) \quad (\ \nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\ ) .$$

1 形式 $\omega_A = A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z$ **に対し，**

$$\mathrm{d}\omega_A = (\partial_y A_z - \partial_z A_y)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (\partial_z A_x - \partial_x A_z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (\partial_x A_y - \partial_y A_x)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

rot $\boldsymbol{A}$ が現れる．

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y, \partial_z A_x - \partial_x A_z, \partial_x A_y - \partial_y A_x) .$$

外微分（$N = 3$, ベクトル解析との関連）

（例） $N = 3$, $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$.

$$\mathrm{d}f = \partial_x f \mathrm{d}x + \partial_y f \mathrm{d}y + \partial_z f \mathrm{d}z \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{grad}\, f = \nabla f = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f) \quad (\ \nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\ ) .$$

1 形式 $\omega_A = A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z$ **に対し，**

$$\mathrm{d}\omega_A = (\partial_y A_z - \partial_z A_y)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (\partial_z A_x - \partial_x A_z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (\partial_x A_y - \partial_y A_x)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

rot $\boldsymbol{A}$ が現れる．

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y, \partial_z A_x - \partial_x A_z, \partial_x A_y - \partial_y A_x) .$$

同様に，2 形式 $\omega_A = A_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + A_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + A_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ **に対しては，**

$$\mathrm{d}\omega_A = (\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

div $\boldsymbol{A}$ が現れる．

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z.$$

外微分

外微分を 2 度行うと 0 になる

$$\mathrm{d}^2 = 0.$$

外微分

外微分を 2 度行うと 0 になる

$$\mathrm{d}^2 = 0.$$

$N = 3$, $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$,

- **関数（0 形式）f に対しては,**

$$\mathrm{d}^2 f = 0 \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) = \nabla \times \nabla f = \boldsymbol{0}.$$

- **1 形式 $\omega_A = A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z$ に対しては,**

$$\mathrm{d}^2 \omega_A = 0 \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

外微分

外微分を 2 度行うと 0 になる

$$\mathrm{d}^2 = 0.$$

（証明）外微分の定義より，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2\omega &= \frac{1}{k!}\mathrm{d}\left(\frac{\partial\omega_{\alpha_1\dots\alpha_k}}{\partial q^\beta}\mathrm{d}q^\beta \wedge q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_k}\right)\\ &= \frac{1}{k!}\frac{\partial^2\omega_{\alpha_1\dots\alpha_k}}{\partial q^\gamma \partial q^\beta}\mathrm{d}q^\gamma \wedge \mathrm{d}q^\beta \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_k},\end{aligned}$$

$$\text{青文字} \overset{(1)}{=} \frac{\partial^2\omega_{\alpha_1\dots\alpha_k}}{\partial q^\beta \partial q^\gamma}\mathrm{d}q^\beta \wedge \mathrm{d}q^\gamma \overset{(2)}{=} -\frac{\partial^2\omega_{\alpha_1\dots\alpha_k}}{\partial q^\gamma \partial q^\beta}\mathrm{d}q^\gamma \wedge \mathrm{d}q^\beta = -\text{青文字}.$$

$\big($ (1) は添字の付替 $\beta \leftrightarrow \gamma$，(2) は $\mathrm{d}q^\beta \wedge \mathrm{d}q^\gamma = -\mathrm{d}q^\gamma \wedge \mathrm{d}q^\beta$ と偏微分の順序交換による$\big)$

$$\therefore \quad \text{青文字} = 0.$$

■

外微分

次の公式は頻繁に用いる．

- $T_{\alpha\beta}$：添字 α, β の入れ替えに対して対称である：$T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$.
- $S^{\alpha\beta}$：添字 α, β の入れ替えに対して反対称である：$S^{\alpha\beta} = -S^{\beta\alpha}$.

$$\Downarrow$$

$$T_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} T_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = 0.$$

くさび積の外微分

k 形式 ω，l 形式 η に対し，

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta.$$

外微分

閉形式・完全形式

- 微分形式 ω は**閉形式**である．

$$\overset{\text{def.}}{\iff} \quad \mathrm{d}\omega = 0.$$

- 微分形式 ω は**完全形式**である．

$$\overset{\text{def.}}{\iff} \quad \exists \eta \quad \text{s.t.} \quad \omega = \mathrm{d}\eta.$$

外微分

閉形式・完全形式

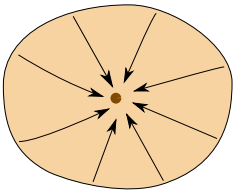
- 微分形式 ω は**閉形式**である．

$$\overset{\text{def.}}{\iff} \quad \mathrm{d}\omega = 0.$$

- 微分形式 ω は**完全形式**である．

$$\overset{\text{def.}}{\iff} \quad \exists \eta \quad \text{s.t.} \quad \omega = \mathrm{d}\eta.$$

- 完全形式は閉形式である（$\because \quad \mathrm{d}^2 = 0$ であるから）．
- 閉形式が完全形式であるか？
  - 微分形式を考えている空間 M の位相幾何学的性質に依る（de Rham コホモロジー）．
  - Poincaré の補題：M が連続変形で 1 点に収縮可能ならば，M 上の閉形式は完全形式である．



M は 1 点に収縮可能．

外微分

外微分は座標の選び方に依らない，

外微分

外微分は座標の選び方に依らない，

（証明）(Q^α) による外微分の表示．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{k!}\frac{\partial \widetilde{\omega}_{\alpha_1\dots\alpha_k}}{\partial Q^\beta}\mathrm{d}Q^\beta\wedge\mathrm{d}Q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}Q^{\alpha_k}\\
&=\frac{1}{k!}\frac{\partial}{\partial Q^\beta}\left(\omega_{\gamma_1\dots\gamma_k}\frac{\partial q^{\gamma_1}}{\partial Q^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial q^{\gamma_k}}{\partial Q^{\alpha_k}}\right)\mathrm{d}Q^\beta\wedge\mathrm{d}Q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}Q^{\alpha_k}\\
&=\frac{1}{k!}\frac{\partial\omega_{\gamma_1\dots\gamma_k}}{\partial Q^\beta}\frac{\partial q^{\gamma_1}}{\partial Q^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial q^{\gamma_k}}{\partial Q^{\alpha_k}}\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\delta}\mathrm{d}q^\delta\wedge\frac{\partial Q^{\alpha_1}}{\partial q^{\epsilon_1}}\mathrm{d}q^{\epsilon_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial Q^{\alpha_k}}{\partial q^{\epsilon_k}}\mathrm{d}q^{\epsilon_k}\\
&\quad+\frac{1}{k!}\omega_{\gamma_1\dots\gamma_k}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial^2 q^{\gamma_1}}{\partial Q^\beta\partial Q^{\alpha_1}}}_{(1)}\frac{\partial q^{\gamma_2}}{\partial Q^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial q^{\gamma_k}}{\partial Q^{\alpha_k}}+\cdots\Bigg)\underbrace{\mathrm{d}Q^\beta\wedge\mathrm{d}Q^{\alpha_1}}_{(2)}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}Q^{\alpha_k}.
\end{aligned}
$$

ここで，(1) は添字 β,α_1 について対称，(2) は添字 β,α_1 について反対称であるから，青字部分=0 である．

外微分

外微分は座標の選び方に依らない，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{k!}\frac{\partial\widetilde{\omega}_{\alpha_1\dots\alpha_k}}{\partial Q^\beta}\mathrm{d}Q^\beta\wedge\mathrm{d}Q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}Q^{\alpha_k}\\
=&\frac{1}{k!}\frac{\partial\omega_{\gamma_1\dots\gamma_k}}{\partial Q^\beta}\frac{\partial q^{\gamma_1}}{\partial Q^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial q^{\gamma_k}}{\partial Q^{\alpha_k}}\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\delta}\mathrm{d}q^\delta\wedge\frac{\partial Q^{\alpha_1}}{\partial q^{\epsilon_1}}\mathrm{d}q^{\epsilon_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial Q^{\alpha_k}}{\partial q^{\epsilon_k}}\mathrm{d}q^{\epsilon_k}\\
=&\frac{1}{k!}\underbrace{\frac{\partial\omega_{\gamma_1\dots\gamma_k}}{\partial Q^\beta}\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\delta}}_{\partial\omega_{\gamma_1\dots\gamma_k}/\partial q^\delta}\underbrace{\frac{\partial q^{\gamma_1}}{\partial Q^{\alpha_1}}\frac{\partial Q^{\alpha_1}}{\partial q^{\epsilon_1}}}_{\delta^{\gamma_1}_{\epsilon_1}}\cdots\underbrace{\frac{\partial q^{\gamma_k}}{\partial Q^{\alpha_k}}\frac{\partial Q^{\alpha_k}}{\partial q^{\epsilon_k}}}_{\delta^{\gamma_k}_{\epsilon_k}}\mathrm{d}q^\delta\wedge\mathrm{d}q^{\epsilon_1}\wedge\cdots\mathrm{d}q^{\epsilon_k}\\
=&\frac{1}{k!}\frac{\partial\omega_{\gamma_1\dots\gamma_k}}{\partial q^\delta}\mathrm{d}q^\delta\wedge\mathrm{d}q^{\gamma_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\gamma_k}\quad\text{（}(q^\alpha)\text{ による外微分の表示）.}
\end{aligned}
$$

今回の内容

1. はじめに
2. 接ベクトル・1 形式
3. 微分形式とくさび積
4. 外微分
5. 微分形式の積分
6. まとめ

微分形式の積分

微分形式（交代多重線形形式）

ベクトルを投げると，面積・体積を返す．

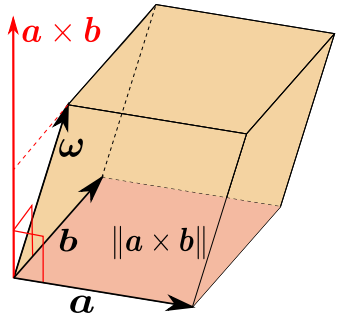
3 次元 Euclid 空間の場合．

$$\omega = \omega_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \omega_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \omega_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

$$X_{\boldsymbol{a}} = a_x \partial_x + a_y \partial_y + a_z \partial_z, \quad X_{\boldsymbol{b}} = b_x \partial_x + b_y \partial_y + b_z \partial_z.$$

$$\Downarrow$$

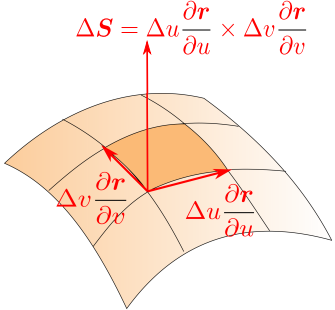
$$\begin{aligned} \langle \omega | X_{\boldsymbol{a}}, X_{\boldsymbol{b}} \rangle &= \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ が張る平行四辺形の} \\ \text{面積ベクトル} \end{array} \right) \\ &= \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ が張る平行六面体の体積.} \end{aligned}$$



微分形式の積分

$$\sum \text{関数値} \times \text{微小面積（体積）} = \text{面積分（体積分）}.$$

$$\begin{aligned}\int_D \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \sum_D \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right) \Delta u \Delta v \\ &= \sum_D \left\langle \omega \middle| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\rangle \Delta u \Delta v.\end{aligned}$$



2 形式 ω の面積分

$$\int_D \omega := \int_D \left\langle \omega \middle| \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial u} \frac{\partial}{\partial q^\alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial v} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \right).$$

微分形式の積分

k 形式 ω の k 次元領域 D 上での積分

$$\int_D \omega := \int_{D_0} \left\langle \omega \middle| \frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^k} \right\rangle \mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^k,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i} := \frac{\partial q^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial q^\alpha}, \quad i = 1, \dots, k \right).$$

ここで D は次のようにパラメータ表示されているとする．

$$D = \left\{ (q^\alpha(u^1, \dots, u^k))_{\alpha=1}^N \,\middle|\, (u^1, \dots, u^k) \in D_0 \right\} \quad (D_0 \subset \mathbb{R}^k).$$

$$\frac{1}{k!} \int_D \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(q) \mathrm{d}q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_k} = \frac{1}{k!} \int_{D_0} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(q(u^1, \dots, u^k)) \frac{\partial(q^{\alpha_1}, \dots, q^{\alpha_k})}{\partial(u^1, \dots, u^k)} \mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^k.$$

この積分の定義は D のパラメータ表示の仕方には依存しない．

微分形式の積分：Stokes の定理

Stokes の定理

ω：$k-1$ 形式，D：k 次元領域，∂D：D の境界 ($k \leq N$).

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D} \omega.$$

- 外微分 $\mathrm{d}\omega$ の積分は，ω の境界上のデータで与えられる．
- 高校数学における微積分の基本定理の一般化．

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

微分形式の積分：Stokes の定理

$N = 3$, $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$ **の場合，**

ベクトル解析における Stokes **の定理，**Gauss **の発散定理を再現する．**

- Stokes **の定理を再現する．**

$$\omega = a_x \mathrm{d}x + a_y \mathrm{d}y + a_z \mathrm{d}z \ : \ 1 \text{ 形式}, \quad S \ : \ 2 \text{ 次元曲面},$$
$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{a})_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{a})_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{a})_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x,$$
$$\int_S \mathrm{rot}\, \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{\partial S} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

- Gauss **の発散定理を再現する．**

$$\omega = a_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + a_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + a_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \ : \ 2 \text{ 形式}, \quad D \ : \ 3 \text{ 次元領域},$$
$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{div}\, \boldsymbol{a} \mathrm{d}V = (\mathrm{div}\, \boldsymbol{a}) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,$$
$$\int_D \mathrm{div}\, \boldsymbol{a} \mathrm{d}V = \int_{\partial D} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

微分形式の積分：Stokes の定理

【Stokes の定理の証明】

積分領域 $D \subset M$ のパラメータ付け．

$$D = \left\{ q(u^1, \ldots, u^k) \;\middle|\; (u^1, \ldots, u^k) \in D_0 \right\} \quad (\, D_0 \subset \mathbb{R}^k \,),$$
$$f \;:\; D_0 \to D,\ (u^1, \ldots, u^k) \mapsto (q^1(u^1, \ldots, u^k), \ldots, q^N(u^1, \ldots, u^k)),$$

$$\omega = \frac{1}{k!}\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(q)\mathrm{d}q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_k} \;:\; D \text{ 上で定義された } k \text{ 形式}.$$

積分 $\int_D \omega$ を定義する際，$q^\alpha = q^\alpha(u^1, \ldots, u^k)$ により変数 u^α の微分形式に変換したものは，
写像 $f : D_0 \to D$ による ω の引き戻し $f^*\omega$ とよばれる．

$$\begin{aligned} f^*\omega &:= \frac{1}{k!}\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(q(u^1, \ldots, u^k))\frac{\partial q^{\alpha_1}}{\partial u^{i_1}}\mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial q^{\alpha_k}}{\partial u^{i_k}}\mathrm{d}u^{i_k} \\ &= \frac{1}{k!}\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(q(u^1, \ldots, u^k))\frac{\partial(q^{\alpha_1}, \ldots, q^{\alpha_k})}{\partial(u^1, \ldots, u^k)}\mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^k. \end{aligned}$$

微分形式の積分は，Euclid 空間への引き戻しにより定義されている．

微分形式の積分：Stokes の定理

微分形式の引き戻しについて次の等式が基本的である：

引き戻しと外微分は交換可能

$k-1$ 形式 ω と写像 $f : D_0(\subset \mathbb{R}^k) \to D$ （D は配位空間内の k 次元領域）について，

$$f^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(f^*\omega).$$

【証明】$\omega = \dfrac{1}{k!}\omega_{\alpha_1\dots\alpha_{k-1}}(q)\mathrm{d}q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_{k-1}}$ に対し，

$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{k!}\frac{\partial\omega_{\alpha_1\dots\alpha_{k-1}}(q)}{\partial q^\beta}\mathrm{d}q^\beta \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_{k-1}},$$

$$\begin{aligned} f^*(\mathrm{d}\omega) &= \frac{1}{k!}\frac{\partial\omega_{\alpha_1\dots\alpha_{k-1}}}{\partial q^\beta}(q(u))\frac{\partial q^\beta}{\partial u^j}\mathrm{d}u^j \wedge \frac{\partial q^{\alpha_1}}{\partial u^{i_1}}\mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial q^{\alpha_{k-1}}}{\partial u^{i_{k-1}}}\mathrm{d}u^{i_{k-1}} \\ &= \frac{1}{k!}\frac{\partial\omega_{\alpha_1\dots\alpha_{k-1}}}{\partial q^\beta}(q(u))\frac{\partial q^\beta}{\partial u^j}\frac{\partial q^{\alpha_1}}{\partial u^{i_1}}\cdots\frac{\partial q^{\alpha_{k-1}}}{\partial u^{i_{k-1}}}\mathrm{d}u^j \wedge \mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_{k-1}}, \end{aligned}$$

微分形式の積分：Stokes の定理

一方，$\mathrm{d}(f^*\omega)$ を計算すると次のようになる．

$$f^*\omega = \frac{1}{k!}\omega_{\alpha_1\dots\alpha_{k-1}}(q(u))\frac{1}{k!}\frac{\partial q^{\alpha_1}}{\partial u^{i_1}}\cdots\frac{\partial q^{\alpha_{k-1}}}{\partial u^{i_{k-1}}}\mathrm{d}u^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{i_{k-1}},$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(f^*\omega) &= \frac{1}{k!}\frac{\partial}{\partial u^j}\left[\omega_{\alpha_1\dots\alpha_{k-1}}(q(u))\frac{\partial q^{\alpha_1}}{\partial u^{i_1}}\cdots\frac{\partial q^{\alpha_{k-1}}}{\partial u^{i_{k-1}}}\right]\mathrm{d}u^j\wedge\mathrm{d}u^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{i_{k-1}}\\
&= \frac{1}{k!}\frac{\partial\omega_{\alpha_1\dots\alpha_{k-1}}}{\partial u^j}(q(u))\frac{\partial q^{\alpha_1}}{\partial u^{i_1}}\cdots\frac{\partial q^{\alpha_{k-1}}}{\partial u^{i_{k-1}}}\mathrm{d}u^j\wedge\mathrm{d}u^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{i_{k-1}}\\
&\quad+\frac{1}{k!}\omega_{\alpha_1\dots\alpha_{k-1}}(q(u))\underbrace{\frac{\partial^2 q^{\alpha_1}}{\partial u^j\partial u^{i_1}}}_{(1)}\frac{\partial q^{\alpha_2}}{\partial u^{i_2}}\cdots\frac{\partial q^{\alpha_{k-1}}}{\partial u^{i_{k-1}}}\underbrace{\mathrm{d}u^j\wedge\mathrm{d}u^{i_1}}_{(2)}\wedge\mathrm{d}u^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{i_{k-1}}\\
&\quad+\cdots
\end{aligned}$$

((1) は j, i_1 について対称，(2) は j, i_1 について反対称だから青字部分 $= 0$)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k!}\frac{\partial\omega_{\alpha_1\dots\alpha_{k-1}}}{\partial q^\beta}(q(u))\frac{\partial q^\beta}{\partial u^j}\frac{\partial q^{\alpha_1}}{\partial u^{i_1}}\cdots\frac{\partial q^{\alpha_{k-1}}}{\partial u^{i_{k-1}}}\mathrm{d}u^j\wedge\mathrm{d}u^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{i_{k-1}}\\
&= f^*(\mathrm{d}\omega).
\end{aligned}$$

（命題の証明終わり）

微分形式の積分：Stokes の定理

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D_0} f^*\omega, \quad \int_D \mathrm{d}\omega = \int_{D_0} f^*(\mathrm{d}\omega) = \int_{D_0} \mathrm{d}(f^*\omega)$$

であるから，D が Euclid 空間 $\mathbb{R}^{k+1}$ 中の領域，座標 (q^α) が Cartesian 座標 (u^i) の場合に Stokes の定理を証明すればよい．

ここでは，$k = 1$ の場合のみ証明する

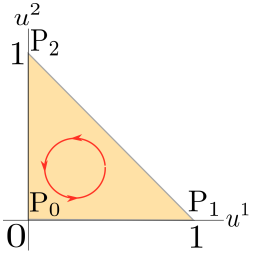
（一般の k の場合の証明は「補遺」に記します．補遺スライドは Web に載せますので，概要欄の URL にアクセスしてご覧ください）．

証明すべき等式は，$S_0 \subset \mathbb{R}^2$ として

$$\oint_{\partial S_0} (\omega_1 \mathrm{d}u^1 + \omega_2 \mathrm{d}u^2) = \iint_{S_0} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial u^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial u^2} \right) \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2.$$

積分領域 $S_0 \subset \mathbb{R}^2$ はどのようにとってもいいから，S_0 として右図の三角形 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ をとることにする．

（D として右の三角形 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ からなめらかに写像されるものを考えることにする）



微分形式の積分：Stokes の定理

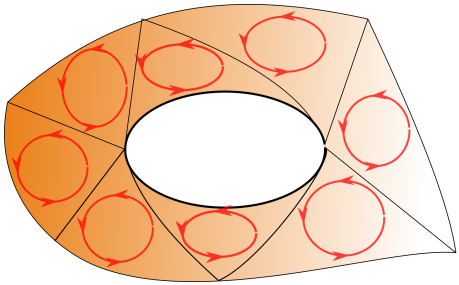
三角形 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ からの写像で曲面が表せない場合．

右図のように曲面を三角形分割し，各曲面三角形上の積分に対し上の結果を適用する．
線積分について，二つの隣接する小三角形が共有する辺からの寄与は，同じ線分の逆方向の線積分が現れるので，互いにキャンセルしあい 0 となる．

$$\int_{\partial D} \omega = \sum_{\partial(\text{小三角形})} \omega,$$

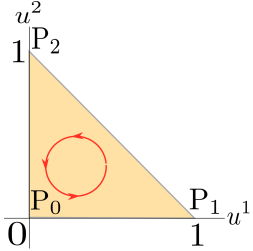
$$\int_{D} \mathrm{d}\omega = \sum_{\text{小三角形}} \mathrm{d}\omega.$$

ゆえに，小三角形について Stokes の定理を証明すればよい．



微分形式の積分：Stokes の定理

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\mathrm{P_0P_1P_2}} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial u^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial u^2} \right) \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2 \\
&= \iint_{0 \le u^1 + u^2 \le 1} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial u^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial u^2} \right) \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2 \\
&= \int_0^1 \left[\omega_2(1 - u^2, u^2) - \omega_2(0, u^2) \right] \mathrm{d}u^2 \\
&\quad - \int_0^1 \left[\omega_1(u^1, 1 - u^1) - \omega_1(u^1, 0) \right] \mathrm{d}u^1 \\
&= \int_{\mathrm{P_1P_2}} \omega_2 \mathrm{d}u^2 + \int_{\mathrm{P_2P_0}} \omega_2 \mathrm{d}u^2 + \int_{\mathrm{P_1P_2}} \omega_1 \mathrm{d}u^1 + \int_{\mathrm{P_0P_1}} \omega_1 \mathrm{d}u^1 \\
&= \int_{\mathrm{P_0P_1 + P_1P_2 + P_2P_0}} (\omega_1 \mathrm{d}u^1 + \omega_2 \mathrm{d}u^2) \\
&= \oint_{\partial(\mathrm{P_0P_1P_2})} (\omega_1 \mathrm{d}u^1 + \omega_2 \mathrm{d}u^2).
\end{aligned}
$$



（Stokes の定理の証明終わり）

今回の内容

1. はじめに
2. 接ベクトル・1 形式
3. 微分形式とくさび積
4. 外微分
5. 微分形式の積分
6. まとめ

まとめ

解析力学のための微分幾何.

- 接ベクトル
- 微分形式（交代多重線形形式）
- くさび積（反可換積の代数）
- 外微分
- 微分形式の積分，Stokes の定理.

次回の予定：

- Hamilton 形式の力学の幾何学的探求.