解析力学 (4)・解析力学のための幾何学・補遺

幾何学的視点から

緒方秀教

電気通信大学大学院　情報・ネットワーク工学専攻

January 2, 2022

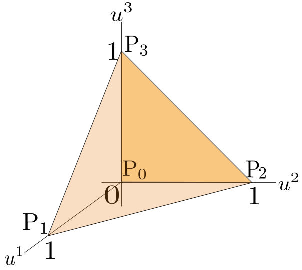
微分形式の積分：一般次元領域の場合の Stokes の定理の証明

$k=2$ の場合　**証明すべき等式は，$D_0 \subset \mathbb{R}^3$ として**

$$\int_{\partial D_0} (\omega_{23} \mathrm{d}u^2 \wedge \mathrm{d}u^3 + \omega_{31} \mathrm{d}u^3 \wedge \mathrm{d}u^1 + \omega_{12} \mathrm{d}u^1 \wedge \mathrm{d}u^2) = \int_{D_0} \left(\frac{\partial \omega_{23}}{\partial u^1} + \frac{\partial \omega_{31}}{\partial u^2} + \frac{\partial \omega_{12}}{\partial u^3} \right) \mathrm{d}u^1 \wedge \mathrm{d}u^2 \wedge \mathrm{d}u^3.$$

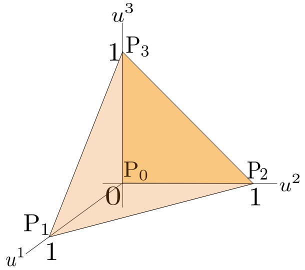
D_0 として右図の四面体 $\mathrm{P_0P_1P_2P_3}$ をとることにする（D として右図の四面体 $\mathrm{P_0P_1P_2P_3}$ からなめらかに写像されるものを考える）．

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{P_0P_1P_2P_3}} \left(\frac{\partial \omega_{23}}{\partial u^1} + \frac{\partial \omega_{31}}{\partial u^2} + \frac{\partial \omega_{12}}{\partial u^3} \right) \mathrm{d}u^1 \wedge \mathrm{d}u^2 \wedge \mathrm{d}u^3 \\
=& \iiint_{\mathrm{P_0P_1P_2P_3}} \frac{\partial \omega_{23}}{\partial u^1} \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2 \mathrm{d}u^3 \\
&+ \iiint_{\mathrm{P_0P_2P_3P_1}} \frac{\partial \omega_{31}}{\partial u^2} \mathrm{d}u^2 \mathrm{d}u^3 \mathrm{d}u^1 \\
&+ \iiint_{\mathrm{P_0P_3P_1P_2}} \frac{\partial \omega_{12}}{\partial u^3} \mathrm{d}u^3 \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2
\end{aligned}$$



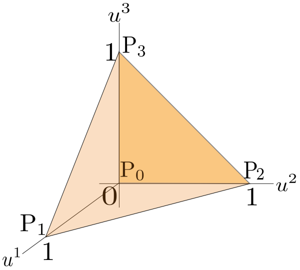
微分形式の積分：一般次元領域の場合の Stokes の定理の証明

$$
\begin{aligned}
&= \iint_{0\le u^2+u^3\le 1} \left[\omega_{23}(1-u^2-u^3,u^2,u^3)-\omega_{23}(0,u^2,u^3)\right] \mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3 \\
&\quad + \iint_{0\le u^1+u^3\le 1} \left[\omega_{31}(u^1,1-u^1-u^3,u^3)-\omega_{31}(u^1,0,u^3)\right] \mathrm{d}u^3\mathrm{d}u^1 \\
&\quad + \iint_{0\le u^1+u^2\le 1} \left[\omega_{12}(u^1,u^2,1-u^1-u^2)-\omega_{12}(u^1,u^2,0)\right] \mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2 \\
&= \iint_{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3} \omega_{23}\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3 - \iint_{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3} \omega_{23}\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3 \\
&\quad + \iint_{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_1} \omega_{31}\mathrm{d}u^3\mathrm{d}u^1 - \iint_{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_3\mathrm{P}_1} \omega_{31}\mathrm{d}u^3\mathrm{d}u^1 \\
&\quad + \iint_{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} \omega_{12}\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2 - \iint_{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} \omega_{12}\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2
\end{aligned}
$$



ここで，例えば $\triangle\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ と $\triangle\mathrm{P}_0\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2$ は逆向き，したがって，
それらの上の面積分も逆符号になることに気をつければ，

微分形式の積分：一般次元領域の場合の Stokes の定理の証明



$$
\begin{aligned}
&= \iiint_{P_1P_2P_3} (\omega_{23} du^2 du^3 + \omega_{31} du^3 du^1 + \omega_{12} du^1 du^2) \\
&\quad + \iint_{P_0P_3P_2} \omega_{23} du^2 du^3 + \iint_{P_0P_1P_3} \omega_{31} du^3 du^1 \\
&\quad + \iint_{P_0P_2P_1} \omega_{12} du^1 du^2 \\
&= \iint_{P_1P_2P_3+P_0P_3P_2+P_0P_1P_3+P_0P_2P_1} (\omega_{23} du^2 du^3 + \omega_{31} du^3 du^1 + \omega_{12} du^1 du^2) \\
&= \int_{\partial(P_0P_1P_2P_3)} (\omega_{23} du^2 \wedge du^3 + \omega_{31} du^1 \wedge du^3 + \omega_{12} du^1 \wedge du^2) \\
&= \int_{\partial(P_0P_1P_2P_3)} \omega.
\end{aligned}
$$

OK.

微分形式の積分：一般次元領域の場合の Stokes の定理の証明

一般の k の場合　まず，高次元空間の領域の境界・向きを定義しなければならない．

$\mathbb{R}^k$ 内の単体 $[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\ldots\mathrm{P}_k]$：$\mathbb{R}^k$ 内の点 $\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1,\ldots,\mathrm{P}_k$ の順序付けられた集まり．

- ただし，$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1},\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2},\ldots,\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_k}$ は $\mathbb{R}^k$ の線形独立なベクトルとする（立体として「潰れていない」）．
- 任意の 2 点を入れ替えたら符号が反転する．そして，その上の積分も符号が反転する．

$$[\mathrm{P}_0\ldots\mathrm{P}_j\ldots\mathrm{P}_i\ldots\mathrm{P}_k]=-[\mathrm{P}_0\ldots\mathrm{P}_i\ldots\mathrm{P}_j\ldots\mathrm{P}_k],$$
$$\int_{[\mathrm{P}_0\ldots\mathrm{P}_j\ldots\mathrm{P}_i\ldots\mathrm{P}_k]}\bigcirc=-\int_{[\mathrm{P}_0\ldots\mathrm{P}_i\ldots\mathrm{P}_j\ldots\mathrm{P}_k]}\bigcirc.$$

- $[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\ldots\mathrm{P}_k]$ の境界．

$$\begin{aligned}\partial[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\ldots\mathrm{P}_k]&=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i[\mathrm{P}_0\ldots\widehat{\mathrm{P}_i}\ldots\mathrm{P}_k]\\&=[\mathrm{P}_1\ldots\mathrm{P}_k]-[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2\ldots\mathrm{P}_k]+[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3\ldots\mathrm{P}_k]-\cdots+(-1)^k[\mathrm{P}_0\ldots\mathrm{P}_{k-1}].\end{aligned}$$

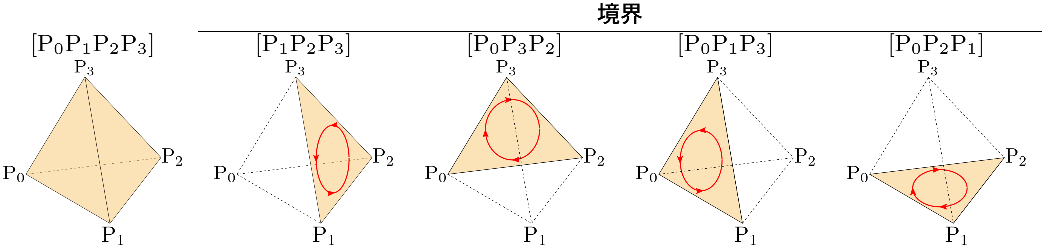
$\widehat{\mathrm{P}_i}$ は P_i を取り除くことを意味する．

微分形式の積分：一般次元領域の場合の Stokes の定理の証明

$$\partial[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\ldots\mathrm{P}_k] = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i[\mathrm{P}_0\ldots\widehat{\mathrm{P}_i}\ldots\mathrm{P}_k]$$
$$= [\mathrm{P}_1\ldots\mathrm{P}_k] - [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2\ldots\mathrm{P}_k] + [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3\ldots\mathrm{P}_k] - \cdots + (-1)^k[\mathrm{P}_0\ldots\mathrm{P}_{k-1}].$$

$k=3$ の場合，

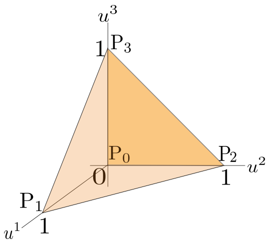
$$\partial[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3] = [\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3] - [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3] + [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3] - [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2]$$
$$= [\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3] + [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2] + [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3] + [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1].$$



微分形式の積分：一般次元領域の場合の Stokes の定理の証明

標準的単体 $[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\ldots\mathrm{P}_k]$

$$\mathrm{P}_0\ (1,0,\ldots,0),\ \ \mathrm{P}_1\ (0,1,0,\ldots,0),\ \ \ldots,\ \ \mathrm{P}_k\ (0,\ldots,0,1).$$



$k=3$ **の場合の標準的単体．**

（Stokes の定理の証明）

$$\omega=\sum_{i=1}^{k}\omega_{1\ldots\hat{i}\ldots k}(u^1,\ldots,u^k)\mathrm{d}u^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}u^i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^k,$$

$$D_0=[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\ldots\mathrm{P}_k]\quad\text{（標準的単体）}$$

の場合について定理を証明する．

$$\mathrm{d}\omega=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\frac{\partial\omega_{1\ldots\hat{i}\ldots k}}{\partial u^i}\mathrm{d}u^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^k.$$

$$\int_{[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\ldots\mathrm{P}_k]}\mathrm{d}\omega=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\int\cdots\int_{0\le\sum_{j=1}^{k}u^j\le 1}\frac{\partial\omega_{1\ldots\hat{i}\ldots k}}{\partial u^i}\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^k$$

微分形式の積分：一般次元領域の場合の Stokes の定理の証明

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\int\cdots\int_{0\le\sum_{j\neq i}u^j\le 1}\Bigg[\omega_{1\dots\widehat{i}\dots k}(u^1,\dots,\underbrace{1-\sum_{j\neq i}u^j}_{i},\dots,u^k) \\
&\qquad\qquad - \omega_{1\dots\widehat{i}\dots k}(u^1,\dots,\underbrace{0}_{i},\dots,u^k)\Bigg]\mathrm{d}u^1\cdots\widehat{\mathrm{d}u^i}\cdots\mathrm{d}u^k \\
&= \int\cdots\int_{0\le\sum_{j=2}^{k}u^j\le 1}\left[\omega_{2\dots k}(1-\sum_{j=2}^{k}u^j,u^2,\dots,u^k)-\omega_{2\dots k}(0,u^2,\dots,u^k)\right]\mathrm{d}u^2\cdots\mathrm{d}u^k \\
&\quad -\int\cdots\int_{0\le\sum_{j\neq 2}u^j\le 1}\left[\omega_{13\dots k}(u^1,1-\sum_{j\neq 2}u^j,u^3,\dots,u^k)-\omega_{13\dots k}(u^1,0,u^3,\dots,u^k)\right]\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^3\cdots\mathrm{d}u^k \\
&\quad \cdots \\
&\quad +(-1)^{k-1}\int\cdots\int_{0\le\sum_{j=1}^{k-1}u^j\le 1}\left[\omega_{1\dots k-1}(u^1,\dots,u^{k-1},1-\sum_{j=1}^{k-1}u^j)-\omega_{1\dots k-1}(u^1,\dots,u^{k-1},0)\right]\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^{k-1}
\end{aligned}
$$

微分形式の積分：一般次元領域の場合の Stokes の定理の証明

$$
\begin{aligned}
&= \int\cdots\int_{[\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\ldots\mathrm{P}_k]} \omega_{2\ldots k}\mathrm{d}u^2\cdots\mathrm{d}u^k - \int\cdots\int_{[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2\ldots\mathrm{P}_k]} \omega_{2\ldots k}\mathrm{d}u^2\cdots\mathrm{d}u^k \\
&\quad - \int\cdots\int_{[\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3\cdots\mathrm{P}_k]} \omega_{13\ldots k}\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^3\cdots\mathrm{d}u^k + \int\cdots\int_{[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3\cdots\mathrm{P}_k]} \omega_{13\ldots k}\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^3\cdots\mathrm{d}u^k \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + (-1)^{k-1}\int\cdots\int_{[\mathrm{P}_k\mathrm{P}_1\ldots\mathrm{P}_{k-1}]} \omega_{1\ldots k-1}\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^{k-1} + (-1)^k\int\cdots\int_{[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\ldots\mathrm{P}_{k-1}]} \omega_{1\ldots k-1}\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^{k-1}
\end{aligned}
$$

積分を行う標準的単体の頂点の並べ方に注意

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\int\cdots\int_{[\mathrm{P}_i\mathrm{P}_1\ldots\widehat{\mathrm{P}_i}\ldots\mathrm{P}_k]} \omega_{1\ldots\hat{i}\ldots k}\mathrm{d}u^1\cdots\widehat{\mathrm{d}u^i}\cdots\mathrm{d}u^k \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i}\int\cdots\int_{[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\ldots\widehat{\mathrm{P}_i}\ldots\mathrm{P}_k]} \omega_{1\ldots\hat{i}\ldots k}\mathrm{d}u^1\cdots\widehat{\mathrm{d}u^i}\ldots\mathrm{d}u^k
\end{aligned}
$$

微分形式の積分：一般次元領域の場合の Stokes の定理の証明

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{k} \int \cdots \int_{[\mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_k]} \omega_{1\ldots\hat{i}\ldots k} \mathrm{d}u^1 \ldots \widehat{\mathrm{d}u^i} \ldots \mathrm{d}u^k + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \int \cdots \int_{[\mathrm{P}_0 \ldots \widehat{\mathrm{P}_i} \ldots \mathrm{P}_k]} \omega_{1\ldots\hat{i}\ldots k} \mathrm{d}u^1 \ldots \widehat{\mathrm{d}u^i} \ldots \mathrm{d}u^k \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \int \cdots \int_{[\mathrm{P}_0 \ldots \widehat{\mathrm{P}_i} \ldots \mathrm{P}_k]} \sum_{j=1}^{k} \omega_{1\ldots\hat{j}\ldots k} \mathrm{d}u^1 \cdots \widehat{\mathrm{d}u^j} \cdots \mathrm{d}u^k \\
&= \int_{\partial[\mathrm{P}_0 \ldots \mathrm{P}_k]} \omega,
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \int_{[\mathrm{P}_0 \ldots \mathrm{P}_k]} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial[\mathrm{P}_0 \ldots \mathrm{P}_k]} \omega.
$$

（一般次元の場合の Stokes の定理の証明終わり）