解析力学 (5)・Hamilton 力学

幾何学的視点から

緒方秀教

電気通信大学大学院　情報・ネットワーク工学専攻

January 9, 2022

はじめに

- 解析力学は座標（人間のモノサシ）の選び方で不変な力学の定式化である．
- Hamilton 形式の力学：力学の幾何学的側面をあらわにしている．
  幾何学：変換に対して不変なものを調べる数学．
- （前回）微分幾何の準備．

今回の予定

Hamilton 力学における不変性・保存則を調べる．

- 正準変換．
- Poisson 括弧．

今回の内容

今回の内容

復習：Hamilton 力学

相空間 $\{\,(q^1,\dots,q^N,p_1,\dots,p_N)\,\}$ $(\,q^\alpha$ ： **一般座標**, p_α ： **一般運動量**).

物理では「位相空間」と言うことが多いが，数学の位相空間 (topological space) とは全く別物である．

Hamilton 正準方程式：Hamilton 力学における運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha},\qquad \frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\qquad (\,\alpha=1,\dots,N\,),$$

$$H=H(q,p,t)=H(q^1,\dots,q^N,p_1,\dots,p_N,t)\quad \text{Hamiltonian.}$$

Hamilton の原理（変分原理）から導出される．

$$\delta S=\delta\int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}}[p_\alpha\dot{q}^\alpha-H(q,p,t)]\mathrm{d}t=0\quad \text{s.t.}\quad \delta q(t_\mathrm{I})=\delta q(t_\mathrm{F})=0.$$

復習：Hamilton 力学

相空間における変数変換 $(q^1, \ldots, q^N, p_1, \ldots, p_N) \to (Q^1, \ldots, Q^N, P_1, \ldots, P_N)$

新変数 (Q, P) **も Hamilton 正準方程式を満たすようにしたい．**

$$\frac{\mathrm{d}Q^\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H_{\mathrm{new}}(Q,P,t)}{\partial P_\alpha}, \quad \frac{\mathrm{d}P_\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H_{\mathrm{new}}(Q,P,t)}{\partial Q^\alpha} \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,),$$

i.e., **新旧両変数について Hamilton の原理が成り立つようにしたい．**

したがって，次が成り立てばよい．

$$\exists W(q,Q,t) \quad \text{s.t.} \quad p_\alpha \mathrm{d}q^\alpha - H_{\mathrm{old}}\mathrm{d}t = P_\alpha \mathrm{d}Q^\alpha - H_{\mathrm{new}}\mathrm{d}t + \mathrm{d}W.$$

正準変換 $(q,p) \to (Q,P)$ **（母関数** $W(q,Q,t)$**）**

$$p_\alpha = \frac{\partial W(q,Q,t)}{\partial q^\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial W(q,Q,t)}{\partial Q^\alpha}, \quad H_{\mathrm{new}} = H_{\mathrm{old}} + \frac{\partial W(q,Q,t)}{\partial t},$$

復習：Hamilton 力学

正準変換 $(q,p) \to (Q,P)$（母関数 $W_1(q,P,t)$）

$$p_\alpha = \frac{\partial W_1(q,P,t)}{\partial q^\alpha}, \quad Q^\alpha = \frac{\partial W_1(q,P,t)}{\partial P_\alpha}, \quad H_{\mathrm{new}} = H_{\mathrm{old}} + \frac{\partial W_1(q,P,t)}{\partial t}.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W(q,Q,t) &= p_\alpha \mathrm{d}q^\alpha - P_\alpha \mathrm{d}Q^\alpha - (H_{\mathrm{old}} - H_{\mathrm{new}})\mathrm{d}t, \\ \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}(\underbrace{W(q,Q,t) + P_\alpha Q^\alpha}_{W_1(q,P,t)}) &= p_\alpha \mathrm{d}q^\alpha + Q^\alpha \mathrm{d}P_\alpha - (H_{\mathrm{old}} - H_{\mathrm{new}})\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Legendre 変換 $\quad W(q,Q,t) \to W_1(q,P,t).$

復習：Hamilton 力学

無限小正準変換（生成子 $G(q,p)$, $\epsilon \approx 0$）$(q,p) \to (q_\epsilon, p^\epsilon)$

母関数 $W_1(q,p^\epsilon) = q^\alpha p^\epsilon_\alpha + \epsilon G(q,p^\epsilon)$ **の正準変換．**$\mathrm{O}(\epsilon^2)$ **を無視する．**

$$q^\alpha_\epsilon = q^\alpha + \epsilon \frac{\partial G(q,p)}{\partial p_\alpha}, \quad p^\epsilon_\alpha = p_\alpha - \epsilon \frac{\partial G(q,p)}{\partial q^\alpha}.$$

復習：Hamilton 力学

無限小正準変換（生成子 $G(q,p)$, $\epsilon \approx 0$）$(q,p) \to (q_\epsilon, p^\epsilon)$

母関数 $W_1(q,p^\epsilon) = q^\alpha p^\epsilon_\alpha + \epsilon G(q,p^\epsilon)$ の正準変換．$\mathrm{O}(\epsilon^2)$ を無視する．

$$q^\alpha_\epsilon = q^\alpha + \epsilon \frac{\partial G(q,p)}{\partial p_\alpha}, \quad p^\epsilon_\alpha = p_\alpha - \epsilon \frac{\partial G(q,p)}{\partial q^\alpha}.$$

$\epsilon \to$ 有限値パラメータ s.

$G(q,p)$ を生成子とする正準変換 $(q,p) \to (q(s), p(s))$

$$\frac{\mathrm{d}q^\alpha(s)}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial G(q,p)}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{\mathrm{d}p_\alpha(s)}{\mathrm{d}s} = -\frac{\partial G(q,p)}{\partial q^\alpha}.$$

とくに，正準方程式による時間発展は正準変換である．

復習：Hamilton 力学

（例）三次元 Euclid 空間，$N=3$, $(q^1,q^2,q^3)=(x,y,z)$.
角運動量は回転の生成子である．

$$M_z = xp_y - yp_x.$$

M_z が生成する正準変換（パラメータ θ）．

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\partial M_z}{\partial p_x},\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\partial M_z}{\partial p_y},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\partial M_z}{\partial p_z},$$
$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{\partial M_z}{\partial x},\quad \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{\partial M_z}{\partial y},\quad \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{\partial M_z}{\partial z}.$$

復習：Hamilton 力学

（例）三次元 Euclid 空間，$N = 3$, $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$.

角運動量は回転の生成子である．

$$M_z = xp_y - yp_x.$$

M_z が生成する正準変換（パラメータ θ）．

$$\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = x, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} = 0, \\
\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}\theta} = -p_y, \quad \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}\theta} = p_x, \quad \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}\theta} = 0. \\
\Downarrow \\
\therefore \quad x(\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta, \quad y(\theta) = x\sin\theta + y\cos\theta, \quad z(\theta) = z, \\
p_x(\theta) = p_x\cos\theta - p_y\sin\theta, \quad p_y(\theta) = p_x\sin\theta + p_y\cos\theta, \quad p_z(\theta) = p_z.
\end{gathered}$$

z 軸中心の角 θ 回転．

（復習終わり）

復習：Hamilton 力学

- これからは簡単のため，正準変換は母関数 W が t を陽に含まないものを考える．このとき，

$$p_\alpha \mathrm{d}q^\alpha - P_\alpha \mathrm{d}Q^\alpha = \mathrm{d}W.$$

- Hamiltonian H も時刻 t を陽に含まないとする．

今回の内容

正準変換

$(q,p) \to (Q,P)$：正準変換．

$$\exists W(q,Q) \quad \text{s.t.} \quad p_\alpha \mathrm{d}q^\alpha - P_\alpha \mathrm{d}Q^\alpha = \mathrm{d}W, \tag{1}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}p_\alpha \wedge \mathrm{d}q^\alpha - \mathrm{d}P_\alpha \wedge \mathrm{d}Q^\alpha = \mathrm{d}(p_\alpha \mathrm{d}q^\alpha - P_\alpha \mathrm{d}Q^\alpha) = \mathrm{d}^2 W = 0.$$

逆に

$$\mathrm{d}p_\alpha \wedge \mathrm{d}q^\alpha - \mathrm{d}P_\alpha \wedge \mathrm{d}Q^\alpha = \mathrm{d}(p_\alpha \mathrm{d}q^\alpha - P_\alpha \mathrm{d}Q^\alpha) = 0$$

であるとき，相空間が 1 点可縮ならば，Poincaré の補題より (1) が成立，
すなわち，$(q,p) \to (Q,P)$ は正準変換である（実際問題としては，相空間は 1 点可縮と考えてよい）．

正準変換

$(q,p) \to (Q,P)$：正準変換．

$$\exists W(q,Q) \quad \text{s.t.} \quad p_\alpha \mathrm{d}q^\alpha - P_\alpha \mathrm{d}Q^\alpha = \mathrm{d}W, \tag{1}$$
$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}p_\alpha \wedge \mathrm{d}q^\alpha - \mathrm{d}P_\alpha \wedge \mathrm{d}Q^\alpha = \mathrm{d}(p_\alpha \mathrm{d}q^\alpha - P_\alpha \mathrm{d}Q^\alpha) = \mathrm{d}^2 W = 0.$$

逆に

$$\mathrm{d}p_\alpha \wedge \mathrm{d}q^\alpha - \mathrm{d}P_\alpha \wedge \mathrm{d}Q^\alpha = \mathrm{d}(p_\alpha \mathrm{d}q^\alpha - P_\alpha \mathrm{d}Q^\alpha) = 0$$

であるとき，相空間が 1 点可縮ならば，Poincaré の補題より (1) が成立，
すなわち，$(q,p) \to (Q,P)$ は正準変換である（実際問題としては，相空間は 1 点可縮と考えてよい）．

正準 2 形式と正準変換の特徴づけ (1)

- 正準 2 形式：$\mathrm{d}p_\alpha \wedge \mathrm{d}q^\alpha$.
- $(q,p) \to (Q,P)$ は正準変換である．$\Leftrightarrow$ 正準 2 形式が不変である：$\mathrm{d}p_\alpha \wedge \mathrm{d}q^\alpha = \mathrm{d}P_\alpha \wedge \mathrm{d}Q^\alpha$.

正準変換

$$(z^\mu) = (z^1, \ldots, z^N, z^{N+1}, \ldots, z^{2N}) := (q^1, \ldots, q^N, p_1, \ldots, p_N).$$

正準 2 形式 $\quad \mathrm{d}p_\alpha \wedge \mathrm{d}q^\alpha = \dfrac{1}{2} J_{\mu\nu} \mathrm{d}z^\mu \wedge \mathrm{d}z^\nu,$

$$[J_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} O & -I_N \\ I_N & O \end{bmatrix}$$

（I_N：N 次単位行列）.

$(Z^\mu) = (Q^1, \ldots, Q^N, P_1, \ldots, P_N)$ **とすると，**

$$\mathrm{d}P_\alpha \wedge \mathrm{d}Q^\alpha = \frac{1}{2} J_{\mu\nu} \mathrm{d}Z^\mu \wedge \mathrm{d}Z^\nu = \frac{1}{2} J_{\mu\nu} \frac{\partial Z^\mu}{\partial z^\rho} \frac{\partial Z^\nu}{\partial z^\sigma} \mathrm{d}z^\rho \wedge \mathrm{d}z^\sigma.$$

正準変換

$$(z^\mu) = (z^1, \ldots, z^N, z^{N+1}, \ldots, z^{2N}) := (q^1, \ldots, q^N, p_1, \ldots, p_N).$$

正準 2 形式 $\quad \mathrm{d}p_\alpha \wedge \mathrm{d}q^\alpha = \dfrac{1}{2} J_{\mu\nu} \mathrm{d}z^\mu \wedge \mathrm{d}z^\nu,$

$$[J_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} O & -I_N \\ I_N & O \end{bmatrix} \quad \text{（}I_N\text{：}N\text{ 次単位行列）}.$$

$(Z^\mu) = (Q^1, \ldots, Q^N, P_1, \ldots, P_N)$ **とすると，**

$$\mathrm{d}P_\alpha \wedge \mathrm{d}Q^\alpha = \frac{1}{2} J_{\mu\nu} \mathrm{d}Z^\mu \wedge \mathrm{d}Z^\nu = \frac{1}{2} J_{\mu\nu} \frac{\partial Z^\mu}{\partial z^\rho} \frac{\partial Z^\nu}{\partial z^\sigma} \mathrm{d}z^\rho \wedge \mathrm{d}z^\sigma.$$

正準変換の特徴づけ (2)

$(z^\mu) \to (Z^\mu)$ **は正準変換である．** $\quad \Leftrightarrow \quad J_{\mu\nu} \dfrac{\partial Z^\mu}{\partial z^\rho} \dfrac{\partial Z^\nu}{\partial z^\sigma} = J_{\rho\sigma}.$

正準変換

$$(z^\mu) = (z^1, \ldots, z^N, z^{N+1}, \ldots, z^{2N}) := (q^1, \ldots, q^N, p_1, \ldots, p_N).$$

正準 2 形式 $\mathrm{d}p_\alpha \wedge \mathrm{d}q^\alpha = \dfrac{1}{2} J_{\mu\nu} \mathrm{d}z^\mu \wedge \mathrm{d}z^\nu,$

$$[J_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} O & -I_N \\ I_N & O \end{bmatrix}$$ **（I_N：N 次単位行列）**.

$(Z^\mu) = (Q^1, \ldots, Q^N, P_1, \ldots, P_N)$ **とすると，**

$$\mathrm{d}P_\alpha \wedge \mathrm{d}Q^\alpha = \frac{1}{2} J_{\mu\nu} \mathrm{d}Z^\mu \wedge \mathrm{d}Z^\nu = \frac{1}{2} J_{\mu\nu} \frac{\partial Z^\mu}{\partial z^\rho} \frac{\partial Z^\nu}{\partial z^\sigma} \mathrm{d}z^\rho \wedge \mathrm{d}z^\sigma.$$

正準変換の特徴づけ (2′)

$(z^\mu) \to (Z^\mu)$ **は正準変換である．** $\Leftrightarrow$ $M^{\mathrm{T}} J M = J$ $\left(M = \left[\dfrac{\partial Z^\mu}{\partial z^\rho} \right] \text{ Jacobi 行列} \right).$

正準変換

$\mathrm{d}p_\alpha \wedge \mathrm{d}q^\alpha$ は正準変換で不変なので，$\mathrm{d}p_{\alpha_1} \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_k} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}p_{\alpha_k} \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_k}$ $(1 \leq k \leq N)$ も不変である．
とくに次の $2N$ 形式は正準変換で不変である．

$$\mathrm{d}p_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}p_N \wedge \mathrm{d}q^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^N$$

正準変換

$\mathrm{d}p_\alpha \wedge \mathrm{d}q^\alpha$ は正準変換で不変なので，$\mathrm{d}p_{\alpha_1} \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_k} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}p_{\alpha_k} \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_k}$ $(1 \le k \le N)$ も不変である．
とくに次の $2N$ 形式は正準変換で不変である．

$$\mathrm{d}p_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}p_N \wedge \mathrm{d}q^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^N$$

定理

相空間内の有限な領域 D の体積は正準変換 $(q,p) \to (Q,P)$ で不変である．

$$\int \cdots \int_D \mathrm{d}q^1 \cdots \mathrm{d}q^N \mathrm{d}p_1 \cdots \mathrm{d}p_N = \int \cdots \int_{\widetilde{D}} \mathrm{d}Q^1 \cdots \mathrm{d}Q^N \mathrm{d}P_1 \cdots \mathrm{d}P_N$$

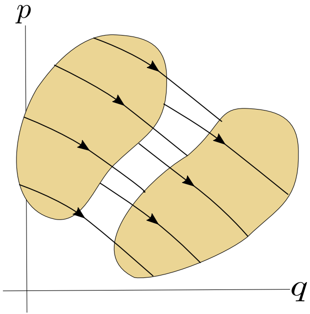
$\widetilde{D}$：領域 D の正準変換 $(q,p) \to (Q,P)$ による像．

正準変換：Liouville の定理

Hamilton 正準方程式に従う時間発展は正準変換であるから，

Liouville（リウヴィル）の定理

相空間内の有限な領域の各点が正準方程式に従って運動するとき，領域の体積は不変に保たれる．



相空間内の領域は非圧縮性流体のように動く．

正準変換：Poincaré の再帰定理

Liouville の定理の応用．

Poincaré の再帰定理

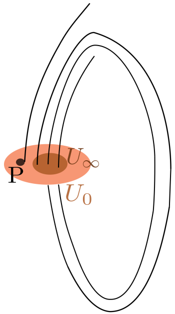
相空間内の等エネルギー面

$$S(E) := \{ (q, p) \mid H(q, p) = E \} \quad (E \ : \ \text{const.}).$$

- $S(E)$ は有界．
- $\mathrm{P} \in S(E)$ 任意．

$$\Downarrow$$

P のどの近傍にも，解が繰り返しその近くに戻ってくるような点が存在する．



正準変換：Poincaré の再帰定理

【Poincaré の再帰定理の証明】

正準方程式による時間発展　$z_0 = z(t=0) \ \to \ z(t).$

$\Rightarrow$ Hamiltonian flow　$\phi_t \ : \ z_0 \mapsto \phi_t(t_0) = z(t).$

軌道 $\phi_t(z_0)$ ($t > 0$) は相空間内の等エネルギー面 $S(E) := \{ (z^\mu) \mid H(z) = E \}$ 内に含まれる．

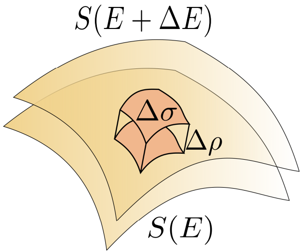
$\Delta\rho$ ： 二つの等エネルギー面 $S(E)$, $S(E+\Delta E)$ の間の距離,

$$\nabla H := (\partial_1 H, \ldots, \partial_{2N} H) \quad (\, \partial_\mu = \partial / \partial z^\mu \,).$$

$\nabla H \perp S(E)$ より $\Delta E = |\nabla H| \Delta\rho \quad (\, |\nabla H| = \sqrt{\sum_\mu (\partial_\mu H)^2} \,).$
図の微小体積 $\Delta\rho\Delta\sigma = \Delta E \Delta\sigma / |\nabla H|$ は Hamiltonian flow で不変，
よって，$\Delta\sigma / |\nabla H|$ も不変である．

$$\mu(A) := \int_A \frac{\mathrm{d}\sigma}{|\nabla H|} \quad (\, A \subset S(E) \,)$$

Hamiltonian flow で不変，　i.e.,　$\mu(\phi_t(A)) = \mu(A).$



$\mathrm{d}\sigma$：$S(E)$ 上の微小面素．

正準変換：Poincaré の再帰定理

$S(E)$ は有界とする ($\mu(S(E)) < \infty$).

任意の点 $\mathrm{P} \in S(E)$，そして，その任意の閉近傍 U_0 をとる．時間 $\tau > 0$ を任意にとる．

- $\mu(U_0) = \mu(\phi_\tau(U_0)) = \mu(\phi_{2\tau}(U_0)) = \cdots > 0$.
- $S(E)$ は有界 ($\mu(S(E)) < \infty$).

したがって，$U_0, \phi_\tau(U_0), \phi_{2\tau}(U_0), \ldots$ はやがて重なり合う，i.e.,

$$\exists k, l \quad \text{s.t.} \quad \phi_{k\tau}(U_0) \cap \phi_{l\tau}(U_0) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad U_0 \cap \phi_{k_1\tau}(U_0) =: U_1 \neq \emptyset \quad (\ k_1 = k - l\ ).$$

U_1 に対して同じ議論をすれば，

$$\exists k_2 \quad \text{s.t.} \quad U_1 \cap \phi_{k_2\tau}(U_1) =: U_2 \neq \emptyset, \quad \ldots$$

こうして得られる閉集合列 $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \cdots$ に含まれる点が必ず存在する．

$$U_\infty := \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$$

とおくと，U_∞ の点は時刻 $k_1\tau, (k_1 + k_2)\tau, \ldots$ に U_∞ に戻ってくる．

（Poincaré の再帰定理の証明終わり）

今回の内容

Poisson 括弧

Poisson 括弧

$A(q,p), B(q,p)$ の Poisson 括弧．

$$\{A, B\} := \frac{\partial A}{\partial q^\alpha}\frac{\partial B}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\frac{\partial B}{\partial q^\alpha} = J^{\mu\nu}\frac{\partial A}{\partial z^\mu}\frac{\partial B}{\partial z^\nu},$$

$$J^{-1} = [J^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} O & I_N \\ -I_N & O \end{bmatrix} \quad (J = [J_{\mu\nu}] \text{ の逆行列}).$$

- Poisson 括弧は正準変換で不変である．
- 正準交換関係

$$\{q^\alpha, p_\beta\} = \delta^\alpha_\beta, \quad \{q^\alpha, q^\beta\} = 0, \quad \{p_\alpha, p_\beta\} = 0.$$

- 正準変換の特徴づけ (3)：$(q,p) \to (Q,P)$ が正準変換である必要十分条件は

$$\{Q^\alpha, P_\beta\} = \delta^\alpha_\beta, \quad \{Q^\alpha, Q^\beta\} = 0, \quad \{P_\alpha, P_\beta\} = 0.$$

Poisson 括弧

Poisson 括弧は正準変換で不変である．

【証明】変数 $(Z^\mu) = (Q, P)$ に関する Poisson 括弧を $\{\cdot,\cdot\}'$ と記す：

$$\{A, B\}' = J^{\mu\nu} \frac{\partial A}{\partial Z^\mu} \frac{\partial B}{\partial Z^\mu}.$$

$(z^\mu) \to (Z^\mu)$ が正準変換であるなら，

$$M^{\mathrm{T}} J M = J, \quad M = \left[\frac{\partial Z^\mu}{\partial z^\rho} \right].$$

両辺の逆行列をとって，

$$M^{-1} J^{-1} M^{-\mathrm{T}} = J^{-1}, \quad \text{i.e.,} \quad J^{\rho\sigma} \frac{\partial z^\mu}{\partial Z^\rho} \frac{\partial z^\nu}{\partial Z^\sigma} = J^{\mu\nu}.$$

$$\therefore \quad \{A, B\}' = J^{\rho\sigma} \frac{\partial z^\mu}{\partial Z^\rho} \frac{\partial z^\nu}{\partial Z^\sigma} \frac{\partial A}{\partial z^\mu} \frac{\partial B}{\partial z^\nu} = J^{\mu\nu} \frac{\partial A}{\partial z^\mu} \frac{\partial B}{\partial z^\nu} = \{A, B\}.$$

■

Poisson 括弧

(q, p) が Hamilton 正準方程式に従って時間発展するとき，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(q, p, t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}. \tag{2}$$

とくに A が時刻 t を陽に含まない時，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(q, p) = \{A, H\}.$$

Poisson 括弧

(q,p) が Hamilton 正準方程式に従って時間発展するとき，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(q,p,t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}. \tag{2}$$

とくに A が時刻 t を陽に含まない時，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(q,p) = \{A, H\}.$$

$A(q,p)$ は保存量 $\quad \Leftrightarrow \quad \{A, H\} = 0.$

【(2) の証明】

$$\because \quad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}.$$

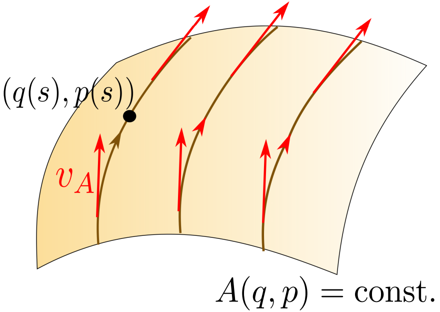
Poisson 括弧

$A(q,p)$ の Hamiltonian flow

$$v_A := \{\cdot, A\} = \frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial A}{\partial q^\alpha}\frac{\partial}{\partial p_\alpha} = J^{\mu\nu}\frac{\partial A}{\partial z^\nu}\frac{\partial}{\partial z^\mu}.$$

v_A の積分曲線 $(q(s), p(s))$（A を生成子とする正準変換）... 曲面 $A(q,p) = \mathrm{const.}$ 上を走る．

$$\frac{\mathrm{d}q^\alpha(s)}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial A}{\partial p_\alpha} = \{q^\alpha, A\},$$
$$\frac{\mathrm{d}p_\alpha(s)}{\mathrm{d}s} = -\frac{\partial A}{\partial q^\alpha} = \{p_\alpha, A\}.$$



v_A の積分曲線に沿う $B(q,p)$ の変化．

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s} = \{B, A\}.$$

Poisson 括弧：Noether の定理

Noether の定理：不変性 $\leftrightarrow$ 保存量

$$
\begin{aligned}
& \text{Hamiltonian } H \text{ は } A \text{ の生成する正準変換で不変である．} \\
\Leftrightarrow\ & \{H, A\} = 0. \\
\Leftrightarrow\ & A \text{ は保存量である．}
\end{aligned}
$$

Poisson 括弧

Poisson 括弧の性質

1. **双線形性．**

$$\begin{aligned}\{c_1A_1+c_2A_2,B\}&=c_1\{A_1,B\}+c_2\{A_2,B\}\\\{A,c_1B_1+c_2B_2\}&=c_1\{A,B_1\}+c_2\{A,B_2\}\end{aligned}\quad(\,c_1,c_2\ :\ \text{const.}\,).$$

2. **反可換性．**

$$\{A,B\}=-\{B,A\}.$$

3. Jacobi **律．**

$$\{A,\{B,C\}\}+\{B,\{C,A\}\}+\{C,\{A,B\}\}=0.$$

4. Leibniz **則（**Poisson **括弧は微分演算子である）．**

$$\{A,BC\}=\{A,B\}C+\{A,C\}B.$$

1., 2., 4. **を示すのは容易．**3. **の証明は「補遺」に載せる．**$*$ **概要欄の** URL **にアクセスしてご覧ください．**

Poisson 括弧：Poisson の定理

Poisson の定理

A, B が保存量なら $\{A, B\}$ も保存量である．

【証明】Jacobi 律と反可換性より

$$\{\{A, B\}, H\} = \{A, \{B, H\}\} - \{B, \{A, H\}\}.$$

A, B が保存量なら $\{A, H\} = \{B, H\} = 0$ により $\{\{A, B\}, H\} = 0.$ ■

Poisson 括弧：Lie 代数

Lie 代数

実ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ において「交換子積」とよばれる演算 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (u, v) \mapsto [u, v] \in \mathfrak{g}$ が与えられており，次の 3 つの性質を満たすとき，$\mathfrak{g}$ は実 Lie 代数（実 Lie 環）であるという．

- 双線形性：

$$[c_1 u_1 + c_2 u_2, v] = c_1 [u_1, v] + c_2 [u_2, v], \quad [u, c_1 v_1 + c_2 v_2] = c_1 [u, v_1] + c_2 [u, v_2]$$

$$(\, u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in \mathfrak{g},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,).$$

- 反可換性：$[u, v] = -[v, u]$ $(\, u, v \in \mathfrak{g}\,)$.
- Jacobi 律：

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0 \quad (\, u, v, w \in \mathfrak{g}\,).$$

物理系の保存量全体の集合は Poisson 括弧を交換子積とする Lie 代数をなす．

Poisson 括弧

（例）三次元 Euclid 空間，$N=3$, $(q^1,q^2,q^3)=(x,y,z)$.

角運動量（回転の生成子）　$M_x = yp_z - zp_y,\ M_y = zp_x - xp_z,\ M_z = xp_y - yp_x.$

$$\Downarrow$$

$$\{p_\alpha, p_\beta\} = 0 \quad (\,\alpha,\beta = x,y,z\,),$$
$$\{p_x, M_x\} = 0,\ \{p_x, M_y\} = p_z,\ \{p_x, M_z\} = -p_y,$$
$$\{p_y, M_x\} = -p_z,\ \{p_y, M_y\} = 0,\ \{p_y, M_z\} = p_x,$$
$$\{p_z, M_x\} = p_y,\ \{p_z, M_y\} = -p_x,\ \{p_z, M_z\} = 0,$$
$$\{M_x, M_y\} = M_z,\ \{M_y, M_z\} = M_x,\ \{M_z, M_x\} = M_y.$$

- 運動量 $\{p_\alpha\}$, 角運動量 $\{M_\alpha\}$ の張るベクトル空間は，Poisson 括弧を交換子積とする Lie 代数をなす．
- 角運動量の x,y 成分が保存するならば z 成分も保存する．
  物理系が x,y 軸まわりの回転で不変ならば z 軸まわりの回転でも不変である．

今回の内容

二次元当方的調和振動子

∗ 山本義隆・中村孔一「解析力学 II」（朝倉書店，1998 年）より引用．

二次元当方的調和振動子について，その不変量を Poisson 括弧により調べる．

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

次の量を導入する．

$$a_x^{\pm} := \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(p_x \mp \mathrm{i}\omega x), \quad a_y^{\pm} := \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(p_y \mp \mathrm{i}\omega y).$$

$a_x^{\pm}, a_y^{\pm}$ の満たす交換関係 $\{H, a_x^{\pm}\} = \pm\mathrm{i}\omega a_x^{\pm}, \quad \{H, a_y^{\pm}\} = \pm\mathrm{i}\omega a_y^{\pm}.$

したがって，次の不変量が存在する．

$$a_x^+ a_x^-, \; a_y^+ a_y^-, \; a_x^+ a_y^-, \; a_x^- a_y^+.$$

$$\because \quad \{a_x^+ a_x^-, H\} = \{a_x^+, H\}a_x^- + \{a_x^-, H\}a_x^+ = -\mathrm{i}\omega a_x^+ a_x^- + \mathrm{i}\omega a_x^- a_x^+ = 0, \quad \text{etc.}$$

二次元当方的調和振動子

4 つの保存量について調べる．

$$a_x^+ a_x^- = \frac{1}{2\omega}(p_x^2 + \omega^2 x^2), \quad a_y^+ a_y^- = \frac{1}{2\omega}(p_y^2 + \omega^2 y^2) \quad x, y \text{ 各成分のエネルギー保存則.}$$

$$a_x^+ a_y^- = \frac{1}{2\omega}\left[p_x p_y + \omega^2 xy - \mathrm{i}\omega(xp_y - yp_x)\right],$$

$$a_x^- a_y^+ = \frac{1}{2\omega}\left[p_x p_y + \omega^2 xy + \mathrm{i}\omega(xp_y - yp_x)\right].$$

したがって，次の保存量が見つかる．

$$xp_y - yp_x \quad \text{軌道角運動量保存} \quad \leftarrow \quad \text{等方性に由来,}$$

$$\frac{1}{2}(p_x p_y + \omega^2 xy) \quad \leftarrow \quad \text{「隠れた対称性」に由来.}$$

二次元当方的調和振動子

正準変換

$$X = \frac{p_x}{\omega}, \quad P_X = -\omega x, \quad Y = y, \quad P_Y = p_y$$

$$(\,\mathrm{d}P_X \wedge \mathrm{d}X + \mathrm{d}P_Y \wedge \mathrm{d}Y = \mathrm{d}p_x \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}p_y \wedge \mathrm{d}y\,).$$

$$\Downarrow$$

$$K = H = \frac{1}{2}(P_X^2 + P_Y^2) + \frac{\omega^2}{2}(X^2 + Y^2).$$

新変数でも二次元当方的調和振動子となる．

よって，軌道角運動量 $XP_Y - YP_X$ が保存する．

$$XP_Y - YP_X = \frac{1}{\omega}(p_x p_y + \omega^2 xy) \quad \to \quad \text{「隠れた対称性」による保存量},$$

$$P_X P_Y + \omega^2 XY = -\omega(xp_y - yp_x) \quad \to \quad \text{軌道角運動量の保存}.$$

$$\text{軌道角運動量} \quad \leftrightarrow \quad \text{「隠れた対称性」による保存量}.$$

二次元当方的調和振動子：二次元 Kepler 問題

二次元 Kepler 問題

$$\text{Lagrangian}\quad L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\ \mu > 0 \text{ const. }).$$

二次元当方的調和振動子：二次元 Kepler 問題

二次元 Kepler 問題

$$\text{Lagrangian} \quad L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\,\mu > 0 \text{ const.}\,).$$

座標変換 $(x, y) \to (\xi, \eta)$, $x = \dfrac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$, $y = \xi\eta$ **を行う．**

$$\text{Lagrangian} \quad L = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{2\mu}{\xi^2 + \eta^2},$$

$$\textbf{運動量} \quad p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = (\xi^2 + \eta^2)\dot{\xi}, \quad p_\eta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = (\xi^2 + \eta^2)\dot{\eta},$$

$$\text{Hamiltonian} \quad H = p_\xi \dot{\xi} + p_\eta \dot{\eta} - L = \frac{1}{2}\frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{2\mu}{\xi^2 + \eta^2}.$$

二次元当方的調和振動子：二次元 Kepler 問題

H は保存量，軌道は相空間内の曲面 $H = \epsilon$ (const.) 上にある．
$\epsilon < 0$ のとき，配位空間（(x, y)-平面）内の楕円軌道を動く．$\epsilon = -\omega^2/2(< 0)$ とおくと，

$$\frac{1}{2}\frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{2\mu}{\xi^2 + \eta^2} = -\frac{\omega^2}{2},$$

二次元当方的調和振動子：二次元 Kepler 問題

H は保存量，軌道は相空間内の曲面 $H = \epsilon$ (const.) 上にある．
$\epsilon < 0$ のとき，配位空間（(x, y)-平面）内の楕円軌道を動く．$\epsilon = -\omega^2/2(< 0)$ とおくと，

$$\frac{1}{2}\frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{2\mu}{\xi^2 + \eta^2} = -\frac{\omega^2}{2},$$

$$\therefore \quad K := \frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2) + \frac{\omega^2}{2}(\xi^2 + \eta^2) = 2\eta$$ 二次元当方的調和振動子の Hamiltonian!

したがって，K を Hamiltonian とする正準方程式（時間変数 τ）

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial K}{\partial p_\xi}, \quad \frac{\mathrm{d}p_\xi}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial K}{\partial \xi}, \quad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial K}{\partial p_\eta}, \quad \frac{\mathrm{d}p_\eta}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial K}{\partial \eta}$$

の解軌道に沿って，i.e., 曲面 $K = \mathrm{const.}$ 上で先程の 4 つの量が保存する．

二次元当方的調和振動子：二次元 Kepler 問題

曲面 $K=\text{const.}$ 上で次の 4 つの量が保存する．

$$H_\xi := \frac{1}{2}(p_\xi^2+\omega^2\xi^2), \quad H_\eta := \frac{1}{2}(p_\eta^2+\omega^2\eta^2),$$
$$L := \xi p_\eta - \eta p_\xi, \quad S := p_\xi p_\eta + \omega^2\xi\eta.$$

$K=\text{const.} \Leftrightarrow H=\text{const.}$ であるから，結局，実際の物理系の運動において上の 4 つの量が保存する．

$$L = 2(x\dot{y}-y\dot{x}) \quad \rightarrow \quad \text{軌道角運動量保存.}$$

$$\left.\begin{aligned} H_\xi - H_\eta &= -2\left\{\dot{y}(x\dot{y}-y\dot{x})-\mu\frac{x}{r}\right\} \\ S &= -2\left\{-\dot{x}(x\dot{y}-y\dot{x})-\mu\frac{y}{r}\right\}\end{aligned}\right\} \quad \text{Lenz ベクトル保存} \quad \left(r=\sqrt{x^2+y^2}\right). \tag{3}$$

Lenz ベクトル　$\dot{\boldsymbol{r}}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})-\mu\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$，$H_\xi-H_\eta$ は x 成分 $\times(-2)$，S は y 成分 $\times(-2)$.

(3) の導出は面倒なので「補遺」に記します（概要欄の URL にアクセスして補遺 PDF を御覧ください）．

今回の内容

まとめ

- 正準変換．
  - 正準変換 $\Leftrightarrow$ 正準 2 形式が不変．
  - 正準変換における不変量，Liouville の定理→ Poincaré の再帰定理．
- Poisson 括弧：保存則を記述．
  - A は保存量 $\Leftrightarrow \{A, H\} = 0.$
  - Noether の定理：不変性 $\leftrightarrow$ 保存量の存在．
  - 不変量全体の集合：Lie 代数の構造．
- 二次元当方的調和振動子．二次元 Kepler 問題．

  Poisson 括弧→隠れた対称性による保存量．Lenz ベクトル保存．