量子力学で特殊関数を学ぶ（Hermite 多項式）

緒方秀教

電気通信大学　情報・ネットワーク工学専攻

February 5, 2022

はじめに

今回の目的

量子力学を使って特殊関数の勉強をしよう．

- 特殊関数：量子力学の学習で一番のネック．
  球面調和関数，Laguerre 多項式，Bessel 関数，$\cdots$
- 逆に，量子力学の知識を用いて特殊関数の勉強はできるかも？
- （今回）Hermite 多項式 $\longleftarrow$ 調和振動子の量子力学．

数学と物理

- 微分積分学 $\leftrightarrow$ Newton 力学
- ベクトル解析 $\leftrightarrow$ 電磁気学
- 特殊関数 $\leftrightarrow$ 量子力学？

Contents

Contents

一次元調和振動子の量子力学

一次元調和振動子の Schrödinger 方程式

$$\widehat{H}\varphi_n(q) = E_n\varphi_n(q),$$

$$\text{Hamiltonian} \quad \widehat{H} = \frac{\widehat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad \left(\widehat{p} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\right).$$

ブラケット記法（量子力学の線形代数的側面を強調）.

$$\text{Schrödinger 方程式} \quad \widehat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle,$$

$$\begin{cases} \text{ケット (ket)} & |n\rangle \leftrightarrow \varphi_n(q), \\ \text{ブラ (bra, 双対ベクトル)} & \langle n| \leftrightarrow \varphi_n(q)^*, \end{cases}$$

$$\text{内積（ブラケット, bracket）} \quad \langle n|n'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\,\varphi_n(q)^*\varphi_{n'}(q).$$

(教科書)

J.J. サクライ& J. ナポリターノ，現代の量子力学（上・下）第 2 版，吉岡書店，2014 年.

Contents

消滅・生成演算子

消滅・生成演算子

消滅演算子 $\hat{a} := \dfrac{i\hat{p} + m\omega q}{\sqrt{2\hbar m\omega}} = \sqrt{\dfrac{\hbar}{2m\omega}}\left(\dfrac{d}{dq} + \dfrac{m\omega}{\hbar}q\right),$

生成演算子 $\hat{a}^\dagger := \dfrac{-i\hat{p} + m\omega q}{\sqrt{2\hbar m\omega}} = -\sqrt{\dfrac{\hbar}{2m\omega}}\left(\dfrac{d}{dq} - \dfrac{m\omega}{\hbar}q\right).$

（量子力学）エネルギー $\hbar\omega$ の粒子を 1 個消滅・生成する．

交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1,$

Hamiltonian $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{n} + \dfrac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \dfrac{1}{2}\right),$

“数"演算子 $\hat{n} := \hat{a}^\dagger\hat{a}.$

固有エネルギー $E_n = \hbar\omega\left(n + \dfrac{1}{2}\right), \quad n : \hat{n}$ の固有値.

消滅・生成演算子

- $\widehat{n} = \widehat{a}^\dagger \widehat{a}$ の固有値は 0 または正の数である：$n \geq 0$.

$$\because \quad n = \langle n|\widehat{n}|n\rangle = \langle n|\widehat{a}^\dagger \widehat{a}|n\rangle = \|\widehat{a}|n\rangle\|^2 \geq 0.$$

$\square$

- $[\widehat{n}, \widehat{a}] = -\widehat{a}, \quad [\widehat{n}, \widehat{a}^\dagger] = \widehat{a}^\dagger.$

$$\because \quad [\widehat{n}, \widehat{a}] = \widehat{a}^\dagger \widehat{a}^2 - \widehat{a}\widehat{a}^\dagger \widehat{a} = -[\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger]\widehat{a} = -\widehat{a},$$

$$[\widehat{n}, \widehat{a}^\dagger] = \widehat{a}^\dagger \widehat{a}\widehat{a}^\dagger - \widehat{a}^{\dagger 2}\widehat{a} = \widehat{a}^\dagger [\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger] = \widehat{a}^\dagger.$$

$\square$

消滅・生成演算子

- $\widehat{n} = \widehat{a}^\dagger \widehat{a}$ の固有値は 0 または正の数である：$n \geq 0$.

$$\because \quad n = \langle n|\widehat{n}|n\rangle = \langle n|\widehat{a}^\dagger\widehat{a}|n\rangle = \|\widehat{a}|n\rangle\|^2 \geq 0.$$

$\square$

- $[\widehat{n}, \widehat{a}] = -\widehat{a}, \quad [\widehat{n}, \widehat{a}^\dagger] = \widehat{a}^\dagger.$

$$\because \quad [\widehat{n}, \widehat{a}] = \widehat{a}^\dagger\widehat{a}^2 - \widehat{a}\widehat{a}^\dagger\widehat{a} = -[\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger]\widehat{a} = -\widehat{a},$$

$$[\widehat{n}, \widehat{a}^\dagger] = \widehat{a}^\dagger\widehat{a}\widehat{a}^\dagger - \widehat{a}^{\dagger 2}\widehat{a} = \widehat{a}^\dagger[\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger] = \widehat{a}^\dagger.$$

$\square$

この交換関係より次を得る．

$$\widehat{n}\widehat{a}|n\rangle = (\widehat{a}\widehat{n} + [\widehat{n}, \widehat{a}])|n\rangle = (n-1)\widehat{a}|n\rangle,$$

$$\widehat{n}\widehat{a}^\dagger|n\rangle = (\widehat{a}^\dagger\widehat{n} + [\widehat{n}, \widehat{a}^\dagger])|n\rangle = (n+1)\widehat{a}^\dagger|n\rangle.$$

消滅・生成演算子

- $\widehat{n} = \widehat{a}^\dagger \widehat{a}$ の固有値は 0 または正の数である：$n \geq 0$.

$$\because \quad n = \langle n|\widehat{n}|n\rangle = \langle n|\widehat{a}^\dagger \widehat{a}|n\rangle = \|\widehat{a}|n\rangle\|^2 \geq 0.$$

$\square$

- $[\widehat{n}, \widehat{a}] = -\widehat{a}, \quad [\widehat{n}, \widehat{a}^\dagger] = \widehat{a}^\dagger$.

$$\because \quad [\widehat{n}, \widehat{a}] = \widehat{a}^\dagger \widehat{a}^2 - \widehat{a}\widehat{a}^\dagger \widehat{a} = -[\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger]\widehat{a} = -\widehat{a},$$

$$[\widehat{n}, \widehat{a}^\dagger] = \widehat{a}^\dagger \widehat{a}\widehat{a}^\dagger - \widehat{a}^{\dagger 2}\widehat{a} = \widehat{a}^\dagger[\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger] = \widehat{a}^\dagger.$$

$\square$

この交換関係より次を得る．

$$\widehat{n}\widehat{a}|n\rangle = (\widehat{a}\widehat{n} + [\widehat{n}, \widehat{a}])|n\rangle = (n-1)\widehat{a}|n\rangle,$$

$$\widehat{n}\widehat{a}^\dagger|n\rangle = (\widehat{a}^\dagger\widehat{n} + [\widehat{n}, \widehat{a}^\dagger])|n\rangle = (n+1)\widehat{a}^\dagger|n\rangle.$$

- $\widehat{a}|n\rangle$ は $\widehat{n}$ の固有値 $n-1$ の固有状態．
- $\widehat{a}^\dagger|n\rangle$ は $\widehat{n}$ の固有値 $n+1$ の固有状態．

- 消滅演算子 $\widehat{a}$ は $\widehat{n}$ の固有値を 1 だけ下げる．
- 生成演算子 $\widehat{a}^\dagger$ は $\widehat{n}$ の固有値を 1 だけ上げる．

消滅・生成演算子

$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ の固有値 n は 0 または正の整数である：$n = 0, 1, 2, \ldots$.

$\because$ もし非負整数でない固有値があれば，消滅演算子 $\hat{a}$ により整数分固有値を下げた固有状態が作れるから，負固有値の固有状態が存在することになり，矛盾． $\square$

消滅・生成演算子

$\widehat{n} = \widehat{a}^\dagger \widehat{a}$ の固有値 n は 0 または正の整数である：$n = 0, 1, 2, \ldots.$

$\because$　もし非負整数でない固有値があれば，消滅演算子 $\widehat{a}$ により整数分固有値を下げた固有状態が作れるから，負固有値の固有状態が存在することになり，矛盾． $\square$

$$\widehat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \widehat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

$\because$　$\widehat{a}|n\rangle$ は $\widehat{n}$ の固有値 $n-1$ の固有状態であったから，$\widehat{a}|n\rangle = c|n-1\rangle$.

$$|c|^2 = \|\widehat{a}|n\rangle\|^2 = \langle n|\widehat{a}^\dagger\widehat{a}|n\rangle = \langle n|\widehat{n}|n\rangle = n \quad \text{により} \quad c = \sqrt{n}.$$

$\widehat{a}^\dagger|n\rangle$ は $\widehat{n}$ の固有値 $n+1$ の固有状態であったから，$\widehat{a}|n\rangle = c'|n+1\rangle$.

$$|c'|^2 = \|\widehat{a}^\dagger|n\rangle\|^2 = \langle n|\widehat{a}\widehat{a}^\dagger|n\rangle = \langle n|(\widehat{a}^\dagger\widehat{a} + [\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger])|n\rangle$$
$$= \langle n|(\widehat{n}+1)|n\rangle = n+1 \quad \text{により} \quad c' = \sqrt{n+1}.$$

$\square$

Contents

Hermite 多項式の導出

これから，消滅・生成演算子を使って Hermite 多項式を導出する．

Hermite 多項式の導出

これから，消滅・生成演算子を使って Hermite 多項式を導出する．

まず，$\hat{n}$ の固有値 0 の固有状態 $|0\rangle$ に対応する波動関数 $\varphi_0(q)$ を求める．
$\|\hat{a}|n\rangle\|^2 = \langle 0|\hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle = \langle 0|\hat{n}|0\rangle = 0$ より $\hat{a}|0\rangle = 0$ であるから，

$$\hat{a}^\dagger\varphi_0(q) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} + \frac{m\omega}{\hbar}q\right)\varphi_0(q) = 0.$$

この微分方程式を解いて，

$$\varphi_0(q) = C_0 \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right).$$

規格化条件より係数 C_0 を定める．

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q|\varphi_0(q)|^2 = |C_0|^2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q\exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}q^2\right) = |C_0|^2\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}},$$

$$\therefore\quad C_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}.$$

Hermite 多項式の導出

一般の固有状態 $|n\rangle$ に対応する波動関数 $\varphi_n(q)$ を求める．

$|1\rangle = \widehat{a}^\dagger|0\rangle$ より，

$$\varphi_1(q) = \widehat{a}^\dagger \varphi_0(q)$$

$$= -C_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} - \frac{m\omega}{\hbar}q\right)\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right)$$

$$= -C_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\exp\left(\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left[\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right)\cdot\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right)\right]$$

$$= -C_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\exp\left(\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}q^2\right).$$

Hermite 多項式の導出

一般の固有状態 $|n\rangle$ に対応する波動関数 $\varphi_n(q)$ を求める．

$|1\rangle = \hat{a}^\dagger|0\rangle$ より，

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(q) &= \hat{a}^\dagger \varphi_0(q) \\
&= -C_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} - \frac{m\omega}{\hbar}q\right)\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right) \\
&= -C_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\exp\left(\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left[\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right)\cdot\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right)\right] \\
&= -C_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\exp\left(\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}q^2\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{a}^\dagger &= -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} - \frac{m\omega}{\hbar}q\right) \\
&= -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\exp\left(\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left[\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right)\bullet\right], \\
\hat{a} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left[\exp\left(\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right)\bullet\right].
\end{aligned}
$$

Hermite 多項式の導出

$|2\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}^\dagger|1\rangle$ より

$$
\begin{aligned}
\varphi_2(q) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}^\dagger\varphi_1(q) \\
&= \frac{(-1)^2}{\sqrt{2}}C_0\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{2/2}\exp\left(\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right) \\
&\quad\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left[\underbrace{\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right)\cdot\exp\left(\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right)}_{\text{相殺する}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}q^2\right)\right] \\
&= \frac{(-1)^2}{\sqrt{2}}C_0\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{2/2}\exp\left(\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2}\exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}q^2\right).
\end{aligned}
$$

同様にして，$|n\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\hat{a}^\dagger|n-1\rangle$ を用いて $|3\rangle, |4\rangle, \ldots$ を計算する．

Hermite 多項式の導出

$$\varphi_n(q) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} C_0 \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{n/2} \exp\left(\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}q^n} \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}q^2\right)$$

$$= \frac{C_0}{\sqrt{2^n n!}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right) \underbrace{H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q\right)}_{\text{多項式}} \quad (\, n = 0, 1, 2, \ldots\,).$$

Hermite 多項式の導出

$$\begin{aligned}\varphi_n(q) &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} C_0 \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{n/2} \exp\left(\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}q^n} \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}q^2\right) \\ &= \frac{C_0}{\sqrt{2^n n!}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right) \underbrace{H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q\right)}_{\text{多項式}} \qquad (\, n = 0, 1, 2, \ldots\,).\end{aligned}$$

Hermite 多項式 (Rodrigues の公式)

$$H_n(x) := (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2} \qquad (\, n = 0, 1, 2, \ldots\,)$$

Contents

Hermite 多項式の公式

Hermite 多項式の諸公式を量子力学的事実から導出する.

Hermite 多項式の公式

直交関係式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-x^2} H_n(x) H_{n'}(x) = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nn'},$$

$$\delta_{nn'} := \begin{cases} 1 & (\ n = n'\ ) \\ 0 & (\ n \neq n'\ ) \end{cases} \qquad \text{(Kronecker のデルタ)}.$$

出発点 $\langle n | n' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q \varphi_n(q)^* \varphi_{n'}(q) = \delta_{nn'}.$

Hermite 多項式の公式

$n \neq n'$ の場合，

$$\langle n|n'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q \varphi_n(q)^* \varphi_{n'}(q) = 0 \quad \text{より} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-x^2} H_n(x) H_{n'}(x) = 0.$$

$n = n'$ の場合，

$$\begin{aligned} \langle n|n\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q |\varphi_n(q)|^2 \\ &= \frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}q^2\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q\right)^2 = 1, \end{aligned}$$

$x = \sqrt{\dfrac{m\omega}{\hbar}}q$ とおいて，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-x^2} H_n(x)^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

□

漸化式

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x),$$
$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0.$$

第 3 式は第 1・2 式から $H_n'(x)$ を消去して得られる．

出発点　$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$

Hermite 多項式の公式

$$\widehat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle.$$

$$\begin{aligned}
左辺 &= \widehat{a}\varphi_n(q) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left[\exp\left(\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right)\right. \\
&\qquad \left. \times \frac{C_0}{\sqrt{2^n n!}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q\right)\right] \\
&= \frac{C_0}{\sqrt{2^n n!}} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left[H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q\right)\right], \\
右辺 &= \sqrt{n}\varphi_{n-1}(q) \\
&= C_0 \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}(n-1)!}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right) H_{n-1}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q\right)
\end{aligned}$$

消滅演算子 $\widehat{a}$ は Hermite 多項式の次数を 1 下げる．

$x = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q$ とおいて，

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

Hermite 多項式の公式

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \hat{a}^\dagger \varphi_n(q) \\
&= -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \exp\left(\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\Bigg[\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right) \\
&\qquad \times \frac{C_0}{\sqrt{2^n n!}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q\right)\Bigg] \\
&= -\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{C_0}{\sqrt{2^{n+1}n!}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left[\exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}q^2\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q\right)\right], \\
\text{右辺} &= \frac{C_0}{\sqrt{2^{n+1}n!}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right) H_{n+1}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q\right),
\end{aligned}
$$

生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ は Hermite 多項式の次数を 1 上げる．

$x = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q$ とおいて，

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x).$$

$\square$

Hermite 多項式の公式

微分方程式

$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

出発点 $\widehat{a}^\dagger \widehat{a}|n\rangle = n|n\rangle,$

i.e., $\hbar\omega \left(\widehat{a}^\dagger \widehat{a} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle$ Schrödinger 方程式

Hermite 多項式の公式

$$\widehat{a}^\dagger\widehat{a}|n\rangle = n|n\rangle.$$

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \widehat{a}^\dagger\widehat{a}\varphi_n(q)\\
&= -\frac{\hbar}{2m\omega}\exp\left(\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left\{\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left[\frac{C_0}{\sqrt{2^n n!}}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q\right)\right]\right\}\\
&\quad\left(x=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\ \text{とおいて}\right)\\
&= -\frac{C_0}{2\sqrt{2^n n!}}\mathrm{e}^{x^2/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-x^2}H_n'(x)\right],\\
\text{右辺} &= \frac{C_0 n}{\sqrt{2^n n!}}\mathrm{e}^{-x^2/2}H_n(x),
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

$\square$

Contents

Hermite 多項式の母関数

$$F(x,t) := \exp(2xt - t^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x).$$

通常，Hermite 多項式の諸公式は上の母関数を用いて証明される．

（証明）Hermite 多項式の定義（Rodrigues の公式）と Taylor 級数展開を使う．

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = \mathrm{e}^{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{e}^{-(x-t)^2} = \exp(2xt - t^2).$$

$\square$

母関数

Hermite 多項式の母関数は，物理的にはコヒーレント状態に対応する．

$$|\alpha\rangle := \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \quad (\, \alpha \in \mathbb{C}\,).$$

コヒーレント状態

- 消滅演算子 $\hat{a}$ の固有状態．

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

- 量子光学に現れる（レーザー光）．

母関数

コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ の波動関数.

$$
\begin{aligned}
\varphi_\alpha(q) &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\varphi_n(q) \\
&= C_0 \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha/\sqrt{2})^n}{n!}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q\right).
\end{aligned}
$$

コヒーレント状態

$$
\varphi_\alpha(q) = C_0 \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right) F\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q, \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right),
$$

$F(x,t) := \exp(2xt - t^2)$ Hermite 多項式の母関数.

Contents

まとめ

- 一次元調和振動子の量子力学問題の知識を用いて，Hermite 多項式の定義，諸公式を導出した．
- 消滅演算子 $\hat{a}$，生成演算子 $\hat{a}^\dagger$．
- $\hat{a}|0\rangle = 0 \ \longrightarrow$ 「種」となる関数．
  生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ を繰り返し作用させて，Hermite 多項式を得た．
- 消滅・生成演算子を用いて Hermite 多項式の漸化式・微分方程式を得た．
- Hermite 多項式の母関数 . . . 量子力学のコヒーレント状態を表す．

量子力学の知識は Hermite 多項式の理解に援用できる．

同様のメカニズムで他の特殊関数の定義・公式を導出できるだろうか？