解析力学 (7)–保存量と運動方程式の可解性– 幾何学的視点から

緒方秀教

電気通信大学

March 5, 2022

はじめに

保存量があると運動方程式が解ける.

一番簡単な例：エネルギーが保存する 1 次元物理系.

$$\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V(x) = E \quad \text{（運動方程式の積分）},$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))},$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(2/m)(E - V(x))}} = \pm \int \mathrm{d}t = \pm t + \mathrm{const.} \quad \to \quad x = x(t).$$

- もっと多自由度の場合はどうなるか？
- Liouville の定理：保存量と運動方程式の可解性.

Contents

Contents

保存量の存在と可解性

まず，簡単な例で保存量の存在と運動方程式の可解性との関係を見ていく．
以降，保存系（エネルギー保存）のみ考える．

- 2 方向に並進不変性を持つ 3 次元運動（Cartesian 座標）
  自由度 $N = 3$.
  y, z 方向の運動量が保存するとする．

$$p_y = c_y, \quad p_z = c_z \quad (\, c_y, c_z \ \text{const.}\,).$$

Hamiltonian 保存．

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{c_y^2}{2m} + \frac{c_z^2}{2m} + V(x) = E,$$

保存量の存在と可解性

Hamiltonian 保存.

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{c_y^2}{2m} + \frac{c_z^2}{2m} + V(x) = E,$$

正準方程式（x 成分）.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \qquad \frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

$$\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{p_x}{m} = \pm\frac{1}{m}\sqrt{2m(E - V(x)) - c_y^2 - c_z^2}, \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2m(E - V(x)) - c_y^2 - c_z^2}} = \pm\frac{t}{m} + \mathrm{const.}, \\
\Rightarrow \quad x = x(t; c_y, c_z).
\end{gathered}$$

正準方程式（y 成分） $\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial p_y} = \dfrac{c_y}{m} \Rightarrow y = \dfrac{c_y}{m}t + \mathrm{const.}$, etc.

保存量の存在と可解性

- 中心力のもとでの 2 次元運動（極座標）.

  保存量：角運動量 $p_\theta = c_\theta$.

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{c_\theta^2}{2mr^2} + V(r) = E.$$

  正準方程式（r 成分）.

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \qquad \frac{\mathrm{d}p_r}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}.$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{p_r}{m} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r)) - \left(\frac{c_\theta}{mr}\right)^2},$$

$$\int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(2/m)(E - V(r)) - (c_\theta/mr)^2}} = \pm\frac{t}{m} + \mathrm{const.},$$

$$\Rightarrow \quad r = r(t; c_\theta).$$

正準方程式 $$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{c_\theta}{mr(t)^2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta(t).$$

保存量の存在と可解性

これまでの観察で次のことがわかる．

N 自由度の保存系においては，Hamiltonian の他に $N-1$ 個の保存量があり，それらが $N-1$ 個の循環座標の共役運動量（$\Rightarrow$ 保存量）であれば，運動方程式は解ける．

このとき，実際に次のようにして運動方程式が解ける．
一般座標 $q^1, q^2, \ldots, q^N$，一般運動量 $p_1, p_2, \ldots, p_N$.
$q^2, \ldots, q^N$ は循環座標，$p_2, \ldots, p_N$ はそれらの共役運動量であるとする．

$$p_2 = c_2, \quad \ldots, \quad p_N = c_N \quad (c_2, \ldots, c_n \ : \ \text{const.}).$$

$$\text{Hamiltonian} \quad H(q^1, p_1, c_2, \ldots, c_N) = E.$$

p_1 について解いて，

$$p_1 = p_1(q^1; E, c_2, \ldots, c_N).$$

保存量の存在と可解性

$$p_1 = p_1(q^1, E, c_2, \ldots, c_N).$$

正準方程式 $\dfrac{\mathrm{d}q^1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial p_1}$ の右辺に代入して，

$$\frac{\mathrm{d}q^1}{\mathrm{d}t} = f(q^1; E, c_2, \ldots, c_N),$$

$$\int \frac{\mathrm{d}q^1}{f(q^1; E, c_2, \ldots, c_N)} = \pm\frac{1}{m}\int \mathrm{d}t = \pm\frac{t}{m} + \text{const.}$$

$$\Rightarrow \quad q^1 = q^1(t; E, c_2, \ldots, c_N).$$

正準方程式

$$\frac{\mathrm{d}q_1(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H(q^1(t), p_1; c_2, \ldots, c_N)}{\partial p_1}$$

を p_1 について解いて，$p_1 = p_1(t)$ を得る．正準方程式

$$\frac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H(q^1(t), p_1(t); c_2, \ldots, c_N)}{\partial p_\alpha} \quad (\,\alpha = 2, \ldots, N\,)$$

を積分して $q^2(t), \ldots, q^N(t)$ を得る．

「解ける」ことの定義

ここで「運動方程式が解ける」の意味をハッキリさせておく．

一番最初の例：エネルギーが保存する 1 次元物理系．

$$\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V(x) = E \quad \text{（運動方程式の積分）},$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))},$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(2/m)(E - V(x))}} = \pm\int \mathrm{d}t = t + \mathrm{const.}$$

ここまで来れば OK とする．

- 左辺の不定積分を計算 $\longrightarrow$ 左辺は x の関数．
- 逆関数の計算 $\longrightarrow$ 解 $x = x(t)$.

「解ける」ことの定義

例えば，運動方程式を解いて，最終的に次の不定積分に帰着されたとする．

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (\,0 < k < 1 \text{ const.}\,).$$

- 楕円関数を知っている $\longrightarrow$ この問題は解ける．
- 楕円関数を知らない $\longrightarrow$ この問題は解けない．

このような違いはなくしたい．

「解ける」ことの定義

例えば，運動方程式を解いて，最終的に次の不定積分に帰着されたとする．

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad (\, 0 < k < 1 \text{ const.}\,).$$

- 楕円関数を知っている $\longrightarrow$ この問題は解ける．
- 楕円関数を知らない $\longrightarrow$ この問題は解けない．

このような違いはなくしたい．

「求積法」で解ける

次の操作の組み合わせで運動方程式が解けるということ．

- 加減乗除
- 逆関数を求める
- 不定積分
- 微分

Contents

Liouville の定理

Liouville の定理

自由度 N の物理系の運動を考える．

N 個の関数 $I_1(q,p), \ldots, I_N(q,p)$ が存在して，

- $I_1, \ldots, I_N$ は保存量である．
- $\{I_i, I_j\} = 0 \ (\ i \neq j\ )$.
- $\mathrm{d}I_1, \ldots, \mathrm{d}I_N$ は線形独立である．

$$\Downarrow$$

その物理系の運動方程式は求積法で解ける．

（復習）$\{\cdot, \cdot\}$ は Poisson 括弧．

$$\{A, B\} := \frac{\partial A}{\partial q^\alpha}\frac{\partial B}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\frac{\partial B}{\partial q^\alpha}.$$

Liouville の定理（証明）

【証明】証明の方針：

$$I_i(q,p) = C_i \ (\mathrm{const.}) \quad (\ i = 1,\dots,N\ ).$$

とすると，

正準変換 $(q,p) \to (Q^1,\dots,Q^N, C_1,\dots,C_N)$ で $Q^1,\dots,Q^N$ が循環座標となるものが存在する（保存量 $C_1,\dots,C_N$ を一般運動量に取れる）

ことを示す．そうすれば，Hamilton 正準方程式より

$$\frac{\mathrm{d}C_\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H_{\mathrm{new}}}{\partial Q^\alpha} = 0 \quad \to \quad C_\alpha = \mathrm{const.},$$

$$\frac{\mathrm{d}Q^\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H_{\mathrm{new}}(C)}{\partial C_\alpha} =: \nu^\alpha \ (\mathrm{const.}) \quad \to \quad Q^\alpha = \nu^\alpha t + \mathrm{const.}$$

となり，運動方程式が解けたことになる．

後の話を少し簡単にするため，保存量 I_i ($i = 1,\dots,N$) のうちひとつ I_1 は Hamiltonian にしておく．

$$I_1(q,p) = H(q,p) = C_1 \ (\mathrm{const.}).$$

Liouville の定理（証明）

Step 1/4

相空間内の物理系が運動する部分空間

$$M_{\mathrm{I}} := \{ (q, p) \mid I_i(q, p) = C_i \quad (i = 1, \ldots, N) \}$$

は N 次元曲面（N 次元多様体）をなす．

そして，$I_i(q, p)$ の Hamiltonian flow

$$v_i = \frac{\partial I_i}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial I_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial}{\partial p_\alpha} \quad (i = 1, \ldots, N)$$

は M_{I} の接ベクトル場空間の基底をなす．

【Step 1/4 の証明】$\mathrm{d}I_1, \ldots, \mathrm{d}I_N$ は線形独立であるから，

$$\mathrm{rank}\{\nabla I_1, \ldots, \nabla I_N\} = N$$

$$\left(\nabla I_i = \left(\frac{\partial I_i}{\partial z^1}, \ldots, \frac{\partial I_i}{\partial z^{2N}} \right) = \left(\frac{\partial I_i}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial I_i}{\partial q^N}, \frac{\partial I_i}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial I_i}{\partial p_N} \right) \right).$$

よって，陰関数定理より M_{I} は N 次元曲面である．

Liouville の定理（証明）

【Step 1/4 の証明（続）】

$\{I_i\}$ の Hamiltonian flow $\{v_1, \ldots, v_N\}$ が M_{I} の接ベクトル場空間の基底をなすこと．

$\{v_1, \ldots, v_N\}$ が線形独立であることを示せばよい．

$$\sum_{i=1}^{N} a_i v_i = 0 \quad (\, a_1, \ldots, a_N \;: \text{const.}\,)$$

とする．$f(q, p)$ を任意の関数とすると，その Hamiltonian flow

$$v_f = \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\frac{\partial}{\partial p_\alpha}$$

に対し（外微分 $\mathrm{d}I_i$ の定義より）

$$\langle \mathrm{d}I_i | v_f \rangle = v_f[I_i] = \frac{\partial I_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial I_i}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q^\alpha} = -\{f, I_i\} = -v_i[f]$$

であるから，

$$\left\langle \sum_{i=1}^{N} a_i \mathrm{d}I_i \middle| v_f \right\rangle = -\sum_{i=1}^{N} a_i v_i[f] = 0.$$

f は任意の関数だから $\sum_i a_i \mathrm{d}I_i = 0$ となり，$\{\mathrm{d}I_i\}$ が線形独立であることから $a_1 = \cdots = a_N = 0$ を得る． □

Liouville の定理（証明）

∗ 陰関数定理

次のように陰関数表示される関数について．

$$f^i(x^1,\ldots,x^{n+p})=0 \quad (\ i=1,\ldots,n\ )$$

点 $\mathrm{P}_0(x_0^1,\ldots,x_0^{n+p})$ において

$$\mathrm{rank}[\nabla f^1,\ldots,\nabla f^n]\neq 0$$

が成り立つならば，$x^1,\ldots,x^{n+p}$ の中からある p 個の変数がとれて，
点 P_0 近傍において残りの n 個の変数はそれら p 個の変数の関数として与えられる．

【直観的理解】$\mathrm{rank}[\nabla f^1,\ldots,\nabla f^n]=n$ であるから，点 P_0 における Jacobi 行列

$$\begin{bmatrix} \partial_1 f^1 & \ldots & \partial_n f^1 & \ldots & \partial_{n+p} f^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^n & \ldots & \partial_n f^n & \ldots & \partial_{n+p} f^n \end{bmatrix}_{\mathrm{P}_0} \qquad \left(\partial_\alpha f^i=\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}\right).$$

は正則な $n\times n$ 小行列を含む．簡単のため青色部分が正則であるとする．

Liouville の定理

【陰関数の定理の直観的理解・続】点 $\mathrm{P}_0(x_0^1, \dots, x_0^{n+p})$ 近傍で近似的に次式が成り立つ．

$$\begin{bmatrix} \partial_1 f^1 & \dots & \partial_n f^1 & \dots & \partial_{n+p} f^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^n & \dots & \partial_n f^n & \dots & \partial_{n+p} f^n \end{bmatrix}_{\mathrm{P}_0} \begin{bmatrix} x^1 - x_0^1 \\ \vdots \\ x^n - x_0^n \\ \vdots \\ x^{n+p} - x_0^{n+p} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

これより，

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \partial_1 f^1 & \cdots & \partial_n f^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^n & \cdots & \partial_n f^n \end{bmatrix}_{\mathrm{P}_0}^{-1} \begin{bmatrix} \partial_{n+1} f^1 & \cdots & \partial_{n+p} f^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n+1} f^n & \cdots & \partial_{n+p} f^n \end{bmatrix}_{\mathrm{P}_0} \begin{bmatrix} \Delta x^{n+1} \\ \vdots \\ \Delta x^{n+p} \end{bmatrix}$$

$$\left(\Delta x^\alpha = x^\alpha - x_0^\alpha, \quad \alpha = n+1, \dots, n+p \right)$$

を得，点 P_0 近傍で $x^1, \dots, x^n$ は $x^{n+1}, \dots, x^{n+p}$ の線形関数で近似的に表される．$\square$

Liouville の定理（証明）

Step 2/4

$p_1, \ldots, p_N$ を $q^1, \ldots, q^N, C_1, \ldots, C_N$ の関数として表すことができる．

$$p_\alpha = p_\alpha(q, C) \quad (\ \alpha = 1, \ldots, N\ ).$$

【Step 2/4 の証明】$\{dI_i\}$ は線形独立であるから $\mathrm{rank}[\nabla I_1, \ldots, \nabla I_N] = N$.

よって，$z = (q, p) = (z^\mu)$ のうちある N 個の成分 $\{\overline{z}^\mu\}$ について $\det(\partial I_i / \partial \overline{z}^\mu) \neq 0$ となる．

正準変換で座標と運動量を入れ替えることができるから，その $\overline{z}^\mu$ はすべて運動量 $p_1, \ldots, p_N$ であるとしてよい．

すると，$\det(\partial I_i / \partial p_\alpha) \neq 0$ となるので，陰関数定理より，

$$I_i(q, p) = C_i \quad (\ i = 1, \ldots, N\ )$$

を逆に解いて，$p_1, \ldots, p_N$ を $q^1, \ldots, q^N, C_1, \ldots, C_N$ の関数として表すことができる．

Liouville の定理（証明）

Step 3/4

相空間内の積分

$$\int_{q_0}^{q} p_\alpha(q, C)\mathrm{d}q^\alpha \quad (q_0\text{：任意にとった固定点})$$

を考えると，これは終点 q にのみ依存する．
したがって，この積分は $(q, C) = (q^1, \ldots, q^N, C_1, \ldots, C_N)$ の関数である．

このとき，ある正準変換により，$(q, C) = (q^1, \ldots, q^N, C_1, \ldots, C_N)$ を一般座標& 運動量にとることができる．
実際，上記から次の一価関数が定義できる．

$$W(q, C) := \int_{q_0}^{q} p_\alpha(q, C)\mathrm{d}q^\alpha.$$

$p_\alpha = \partial W/\partial q^\alpha$ であるから，$W(q, C)$ を母関数とする正準変換 $(q, p) \to (Q, C)$ が考えられる．

$$p_\alpha = \frac{\partial W(q, C)}{\partial q^\alpha}, \quad Q^\alpha = \frac{\partial W(q, C)}{\partial C_\alpha} \quad (\alpha = 1, \ldots, N).$$

Liouvile の定理（証明）

新変数に対する Hamiltonian は $H_{\mathrm{new}}(Q, C) = C_1$ である
（条件 $I_i = C_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ において $I_1 = H$ と取ったことに注意）.

$*$ $Q_1, \ldots, Q_N$ は循環座標，$C_1, \ldots, C_N$ はそれらに共役な運動量である.

新変数に対する正準方程式は

$$\frac{\mathrm{d}Q^1}{\mathrm{d}t} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}Q^\alpha}{\mathrm{d}t} = 0 \quad (\ \alpha = 2, \ldots, N\ ).$$

これより，

$$Q^1 = t + \mathrm{const.}, \quad Q^\alpha = \mathrm{const.} \quad (\ \alpha = 2, \ldots, N\ )d$$

となり，運動方程式が解かれたことになる.

あとは，Step 3/4 を証明すればよい.

Step 4/4　　Step 3/4：相空間内の積分

$$\int_{q_0}^{q} p_\alpha(q, C)\mathrm{d}q^\alpha \quad （q_0：任意にとった固定点）$$

は終点 q にのみ依存することの証明．

相空間内の任意の閉積分路 C に対し

$$\oint_C p_\alpha(q, I)\mathrm{d}q^\alpha = 0$$

となることを示せばよい．

閉積分路 C が空間 M_I を通って 1 点に可縮ならば，Stokes の定理より次が成り立つ．

$$\oint_C p_\alpha(q, C)\mathrm{d}q^\alpha = \int_S \mathrm{d}p_\alpha \wedge \mathrm{d}q^\alpha = \int_S \left\langle \mathrm{d}p_\alpha \wedge \mathrm{d}q^\alpha \middle| \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta} \right\rangle \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta,$$

S ： C に囲まれた曲面，　ξ, η ： S をパラメータ表示する変数，

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial p_\alpha}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial p_\alpha}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial p_\alpha}.$$

Liouville の定理（証明）

ここで，次が成り立つ．

$$\langle \mathrm{d}p_\alpha \wedge \mathrm{d}q^\alpha | v_i, v_j \rangle = 0.$$

$$\begin{aligned}
\because \quad & \langle \mathrm{d}p_\alpha \wedge \mathrm{d}q^\alpha | v_i, v_j \rangle \\
&= \left\langle \mathrm{d}p_\alpha \wedge \mathrm{d}q^\alpha \middle| \frac{\partial I_i}{\partial p_\beta}\frac{\partial}{\partial q^\beta} - \frac{\partial I_i}{\partial q^\beta}\frac{\partial}{\partial p_\beta}, \frac{\partial I_j}{\partial p_\beta}\frac{\partial}{\partial q^\beta} - \frac{\partial I_j}{\partial q^\beta}\frac{\partial}{\partial p_\beta} \right\rangle \\
&= -\frac{\partial I_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial I_j}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial I_i}{\partial p_\alpha} \cdot \left(-\frac{\partial I_j}{\partial q^\alpha} \right) \\
&= \{I_j, I_i\} = 0 \quad \text{（定理の 2 番めの条件）}.
\end{aligned}$$

$\{v_i\}$ は M_{I} の接ベクトル場空間の基底をなすから，$\partial/\partial\xi, \partial/\partial\eta$ は $\{v_i\}$ の線形結合で表され，したがって

$$\left\langle \mathrm{d}p_\alpha \wedge \mathrm{d}q^\alpha \middle| \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta} \right\rangle = 0.$$

$$\therefore \quad \oint_C p_\alpha(q, I)\mathrm{d}q^\alpha = \int_S \left\langle \mathrm{d}p_\alpha \wedge \mathrm{d}q^\alpha \middle| \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta} \right\rangle \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = 0.$$

（Liouville の定理の証明終わり）

Contents

まとめ

- 保存量があると運動方程式は解ける．
- 保存量の存在 $\Leftrightarrow$ 対称性　　（Noether の定理）
  したがって，物理系が対称性を満たせば，運動方程式が解ける．
- Liouville の定理：物理系の自由度と同じ個数の Poisson 可換な保存量があると，運動方程式は求積法で解ける．
- Liouville の定理の証明．
  - 保存量を運動量とする一般座標& 運動量を見つける．
  - 一般座標& 運動量，正準変換のとり方の自由自在さ．

まとめ

- 保存量があると運動方程式は解ける.
- 保存量の存在 $\Leftrightarrow$ 対称性　　（Noether の定理）
  したがって，物理系が対称性を満たせば，運動方程式が解ける.
- Liouville の定理：物理系の自由度と同じ個数の Poisson 可換な保存量があると，運動方程式は求積法で解ける.
- Liouville の定理の証明.
  - 保存量を運動量とする一般座標& 運動量を見つける.
  - 一般座標& 運動量，正準変換のとり方の自由自在さ.

Thank you!