

解析力学 (8) ・ 力学の Riemann 幾何学 (1) ～その 1～

幾何学的視点から

緒方秀教

電気通信大学大学院 情報・ネットワーク工学専攻

March 21, 2022

はじめに

拘束条件を受ける質点系の運動を考えると，Riemann 幾何学という一種の曲がった空間の幾何学の概念にたどり着く（参考：1 回目の動画）．

- Riemann 空間

長さや曲がり具合を考えることができる空間．

- 計量テンソル
 - Christoffel の記号
- 共変微分：曲がった空間（Riemann 空間）におけるベクトル場の微分．
- 曲率：空間の曲がり具合を示す量．

今回の内容

- ① はじめに
 - ② 幾何学的運動方程式
 - ③ Riemann 空間, 計量テンソル
 - ④ 共変微分
- PC スライドは「その2」に続きます.
 - 本 PC スライド中「補遺」と記してある箇所は、「補遺」スライドを御覧ください.

今回の内容

- ① はじめに
- ② 幾何学的運動方程式
- ③ Riemann 空間，計量テンソル
- ④ 共変微分

幾何学的運動方程式

拘束を受ける N_0 個の質点系.

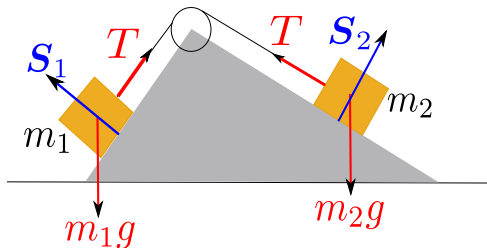
- 質量 $m_1, \dots, m_{N_0}$
- 変位 $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_0}$

運動方程式

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i + \mathbf{S}_i \quad (i = 1, \dots, N_0),$$

$\mathbf{F}_i$: (拘束力以外の) 外力

$\mathbf{S}_i$: 拘束力 (垂直抗力, 遠心力, etc.)



幾何学的運動方程式

物理系の自由度： $N (= 3N_0 - (\text{拘束条件の個数}))$

- N 個の独立なパラメータ $q^1, \dots, q^N$ (一般座標).

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q^1, \dots, q^N) \quad (i = 1, \dots, N_0).$$

- 運動方程式

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = m_i \left(\frac{dq^\alpha}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial q^\alpha}{dt} \frac{\partial q^\beta}{dt} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \right) = \mathbf{F}_i + \mathbf{S}_i.$$

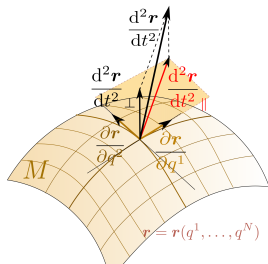
これから拘束面 (配位空間) 上の運動のみ着目する $\rightarrow$ 曲がった空間の幾何学.

(地球表面上の運動のみ着目, 宇宙空間は無視する)

運動方程式の拘束面上の成分のみ抽出する.

両辺と $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha}$ との内積を取り, $i = 1, \dots, N_0$

について和をとる.



幾何学的運動方程式

幾何学的運動方程式（ここだけの造語）

$$\frac{d^2 q^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dq^\beta}{dt} \frac{dq^\gamma}{dt} = \mathcal{F}^\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, N).$$

用いられている記号.

- 計量テンソル

$$g_{\alpha\beta} := \sum_{i=1}^{N_0} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta}, \quad (g^{\alpha\beta}) : (g_{\alpha\beta}) \text{ の逆行列.}$$

- Christoffel の記号 $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha := g^{\alpha\delta} \sum_{i=1}^{N_0} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\delta} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta \partial q^\gamma}.$

- 一般化力 $\mathcal{F}^\alpha := g^{\alpha\beta} \sum_{i=1}^{N_0} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta}.$

拘束面に垂直な拘束力 S_i は消えてしまっていることに注意.

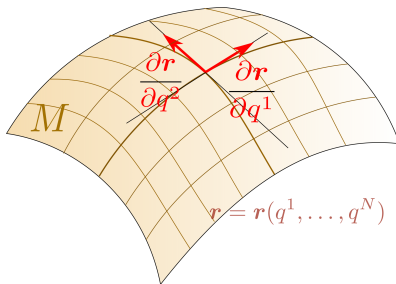
幾何学的運動方程式

- N_0 個の質点の変位ベクトル, 外力をひとつの $3N_0$ 次元ベクトルで表す.

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &:= (\sqrt{m_1}\mathbf{r}_1, \dots, \sqrt{m_{N_0}}\mathbf{r}_{N_0}) \\ &= (\sqrt{m_1}x_1, \sqrt{m_1}y_1, \sqrt{m_1}z_1, \sqrt{m_2}x_2, \sqrt{m_2}y_2, \sqrt{m_2}z_2, \dots), \\ \mathbf{F} &:= \left(\frac{1}{\sqrt{m_1}}\mathbf{F}_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{m_{N_0}}}\mathbf{F}_{N_0} \right).\end{aligned}$$

- **配位空間**: 物理系が運動する空間

$$M := \{ \mathbf{r}(q^1, \dots, q^N) \in \mathbb{R}^{3N_0} \mid (q^1, \dots, q^N) \in D \} \quad (D \subset \mathbb{R}^N).$$



幾何学的運動方程式

幾何学的運動方程式（ここだけの造語）

$$\frac{d^2 q^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dq^\beta}{dt} \frac{dq^\gamma}{dt} = \mathcal{F}^\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, N),$$

用いられている記号.

- 計量テンソル

$$g_{\alpha\beta} := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\beta}, \quad (g^{\alpha\beta}) : (g_{\alpha\beta}) \text{ の逆行列.}$$

- Christoffel の記号

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha := g^{\alpha\delta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\delta} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^\beta \partial q^\gamma}$$

- $\mathcal{F}^\alpha$: 一般化力

$$\mathcal{F}_\alpha := g^{\alpha\beta} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\beta}$$

幾何学的運動方程式

計量テンソル

$$g_{\alpha\beta} := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\beta}.$$

- 配位空間 M 内の曲線の長さを与える.

微小線素の長さ ds

$$ds^2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} dq^\alpha \right\|^2 = g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta.$$

- 配位空間 M の曲がり具合の情報を与える.

Riemann 空間：計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ が与えられている空間.

配位空間（拘束面） M は Riemann 空間の一例である.

Contents

- ① はじめに
- ② 幾何学的運動方程式
- ③ Riemann 空間，計量テンソル
- ④ 共変微分

Riemann 空間（多様体）

計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ という正定値対称な 2 階共変テンソルが与えられている空間（多様体）を **Riemann 空間（Riemann 多様体）** とよぶ．

- $g_{\alpha\beta}$ は 2 階共変テンソル（場）である．
... 座標変換 $(q^\alpha) \rightarrow (Q^\alpha)$ に対し次のように変換する．

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow \tilde{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} g_{\kappa\lambda}.$$

- $g_{\alpha\beta}$ は対称である． ... $g_{\beta\alpha} = g_{\alpha\beta}$ ．
- $g_{\alpha\beta}$ は正定値である．

$$g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta \geq 0 \quad \text{for } \forall X^\alpha, \quad g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = 0 \Rightarrow X^\alpha = 0.$$

Riemann 空間，計量テンソル

配位空間 M は Riemann 空間である．

$g_{\alpha\beta} := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\beta}$ は実際，計量テンソルが満たすべき三つの性質を満たす．

- $g_{\alpha\beta}$ は 2 階共変テンソルである．

座標変換 $(q^\alpha) \rightarrow (Q^\alpha)$ に対し， $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial Q^\alpha} = \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\kappa}$ より

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow \tilde{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial Q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial Q^\beta} = \left(\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\kappa} \right) \cdot \left(\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\lambda} \right) = \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} g_{\kappa\lambda}.$$

- 明らかに $g_{\alpha\beta}$ は対称である： $g_{\beta\alpha} = g_{\alpha\beta}$ ．
- $g_{\alpha\beta}$ の正定値性：任意のベクトル X^α に対し

$$g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = X^\alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \cdot X^\beta \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\beta} = \left\| X^\alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \right\|^2 \geq 0.$$

上の式より， $g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = 0 \Rightarrow X^\alpha = 0$ もわかる．

Riemann 空間では，曲線に対し計量テンソルを用いて長さを与えることができる．

- 微小線素の長さ ds ．

$$ds^2 := g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta.$$

- 曲線 $q^\alpha = q^\alpha(\tau)$ ($\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$) の長さ．

$$L := \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau}} d\tau.$$

Contents

- ① はじめに
- ② 幾何学的運動方程式
- ③ Riemann 空間，計量テンソル
- ④ 共変微分

共変微分

幾何学的運動方程式

$$\frac{D^2 q^\alpha}{dt^2} := \frac{d^2 q^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dq^\beta}{dt} \frac{dq^\gamma}{dt} = \mathcal{F}^\alpha,$$
$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = g^{\alpha\delta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\delta} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^\beta \partial q^\gamma} \quad (\text{Christoffel の記号}).$$

これが、Newton 運動方程式：(質量 $\times$) 加速度 = 外力 に相当するらしい。

- 配位空間 (Riemann 空間) M という曲がった空間内での運動を考えると、 $\frac{D^2 q^\alpha}{dt^2}$ を加速度と考えるべきだろう。
- $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$: 空間 M の曲がりに対する補正を与える。
- 曲がった空間 M における「真っ直ぐ」は $\frac{D^2 q^\alpha}{dt^2} = 0$ であろう。

上の考察から、Riemann 空間における接ベクトル場の微分を定義し直してみる。

共変微分

$$\frac{D^2 q^\alpha}{dt^2} := \frac{d^2 q^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dq^\beta}{dt} \frac{dq^\gamma}{dt}.$$

$v^\alpha := \frac{dq^\alpha}{dt}$ とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{D^2 q^\alpha}{dt^2} &= \frac{dv^\alpha}{dt} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha v^\gamma \frac{dq^\beta}{dt} \\ &= \frac{dq^\beta}{dt} \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial q^\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha v^\gamma \right) =: \frac{dq^\beta}{dt} \nabla_\beta v^\alpha. \end{aligned}$$

- $\nabla_\beta v^\alpha$ を配位空間 M における速度ベクトル場 v^α の q^β 方向の微分とみなすとよいようだ.
- 一般の接ベクトル場 X^α に対しては, 次のように q^β 方向の微分を定義すべきだろう.

$$\nabla_\beta X^\alpha := \frac{\partial X^\alpha}{\partial q^\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha X^\gamma.$$

共変微分

配位空間 $M(\subset \mathbb{R}^{3N_0})$ における共変微分

$$\nabla_\beta X^\alpha := \frac{\partial X^\alpha}{\partial q^\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha X^\gamma, \quad \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha := g^{\alpha\delta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\delta} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^\beta \partial q^\gamma}.$$

上の微分 $\nabla_\beta X^\alpha$ の定義の妥当性を確かめる.

$\mathbb{R}^{3N_0}(\supset M)$ のベクトル $\mathbf{A}$ を考える.

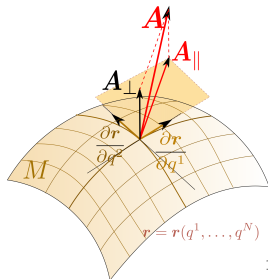
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\parallel + \mathbf{A}_\perp = A^\alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} + \mathbf{A}_\perp \in \mathbb{R}^{3N_0},$$

$\mathbf{A}_\parallel$: M に接する成分, $\mathbf{A}_\perp$: M と垂直な成分.

$\mathbf{A}_\parallel$ の $\partial \mathbf{r} / \partial q^\alpha$ 方向の成分は次式で抽出できる.

$$A^\alpha = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\beta} \cdot \mathbf{A},$$

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\beta}, \quad (g^{\alpha\beta}) : (g_{\alpha\beta}) \text{ の逆行列.}$$



共変微分

配位空間 $M(\subset \mathbb{R}^{3N_0})$ における共変微分

$$\nabla_{\beta} X^{\alpha} := \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial q^{\beta}} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} X^{\gamma}, \quad \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} := g^{\alpha\delta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^{\delta}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^{\beta} \partial q^{\gamma}}.$$

上の微分 $\nabla_{\beta} X^{\alpha}$ の定義の妥当性を確かめる.

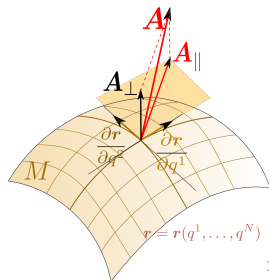
$\mathbb{R}^{3N_0}(\supset M)$ のベクトル $\mathbf{A}$ を考える.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\parallel} + \mathbf{A}_{\perp} = A^{\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^{\alpha}} + \mathbf{A}_{\perp} \in \mathbb{R}^{3N_0},$$

$\mathbf{A}_{\parallel}$: M に接する成分, $\mathbf{A}_{\perp}$: M と垂直な成分.

ベクトルの接成分を抽出する公式

$$\mathbf{A}_{\parallel} = \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^{\beta}} \cdot \mathbf{A} \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^{\alpha}}.$$



共変微分

接ベクトル場 $X = X^\kappa \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha}$ の微分 $\frac{\partial X}{\partial q^\beta}$ の接成分を求める.

$$\frac{\partial X}{\partial q^\beta} = \frac{\partial X^\kappa}{\partial q^\beta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\kappa} + \underbrace{X^\kappa \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^\kappa \partial q^\beta}}_{(a)},$$

(a) は一般に M に垂直な成分を含んでいる.

$\partial X / \partial q^\beta$ の接成分を前頁の公式で抽出すると, 下記のように $\nabla_\beta X^\alpha$ が現れる.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial q^\beta} \right)_\parallel &= \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\beta} \cdot \frac{\partial X}{\partial q^\beta} \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \\ &= \underbrace{\left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\kappa} \frac{\partial X^\kappa}{\partial q^\beta} \right)}_{g^{\alpha\beta} g_{\beta\kappa} = \delta_\kappa^\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} + \left(g^{\alpha\delta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\delta} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^\kappa \partial q^\beta} \right) X^\kappa \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \\ &= \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial q^\beta} + \Gamma_{\beta\kappa}^\alpha X^\kappa \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} = \nabla_\beta X^\alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha}. \end{aligned}$$

共変微分

$$\nabla_{\beta} X^{\alpha} := \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial q^{\beta}} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} X^{\gamma}, \quad \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} := g^{\alpha\delta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^{\delta}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^{\beta} \partial q^{\gamma}}.$$

Christoffel の記号 $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$

- 配位空間=Riemann 空間 M の曲がり具合の情報をもつ.
- 上の定義: M を外部空間 $\mathbb{R}^{3N_0}$ に埋め込んで定義した.
- 実は, 計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ だけで表される.

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial q^{\beta}} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial q^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^{\delta}} \right) \quad (1)$$

配位空間 M に内在的な量 $g_{\alpha\beta}$ だけで与えることができる.

(より大きい外部空間を想定しなくてもよい)

(曲面論) Gauss の驚愕定理

曲面の Gauss 曲率は曲面の計量テンソルだけで定まる.

共変微分

【 $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ の表式 (1) の証明】 $g_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\beta}$ の両辺を q^γ で微分して,

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^\beta \partial q^\gamma} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\beta} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^\gamma \partial q^\alpha}. \quad (2)$$

(2) の添字を入れ替えて,

$$\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\beta} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^\gamma \partial q^\alpha} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\gamma} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\gamma} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^\beta \partial q^\gamma}. \quad (4)$$

(2) + (4) $\div$ (3) をつくって,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^\beta \partial q^\gamma} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} \right), \\ \therefore \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha &= g^{\alpha\delta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\delta} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^\beta \partial q^\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\delta} \right). \end{aligned}$$

□

(一般の) Riemann 空間における共変微分

ベクトル場 $X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha}$ のベクトル場 $Y = Y^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha}$ 方向の共変微分 $\nabla_Y X$

$$\nabla_Y X = Y^\beta (\nabla_\beta X^\alpha) \frac{\partial}{\partial q^\alpha},$$

$$\nabla_\beta X^\alpha := \frac{\partial X^\alpha}{\partial q^\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha X^\gamma.$$

ここで、 $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ は Riemann 空間の計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ を用いて次で「定義」される Christoffel の記号である.

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha := \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\delta} \right).$$

一般の Riemann 空間はより大きい Euclid 空間に埋め込めるか自明でない。
その場合でも、Riemann 空間の内在的な量である計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ を用いて
共変微分を定義することができる。

共変微分の性質 (X, Y, Z : ベクトル場, f, g : 関数)

- 線形性

$$\begin{aligned}\nabla_{fY+gZ}X &= f\nabla_YX + g\nabla_ZX, \\ \nabla_Z(X+Y) &= \nabla_ZX + \nabla_ZY,\end{aligned}$$

- Leibniz 則

$$\nabla_Y(fX) = (Yf)X + f\nabla_YX.$$

共変微分

共変微分 $\nabla_\beta X^\alpha$ はベクトルとして意味を持つ, i.e., **ベクトルの変換則を満たす**.

- 計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ は 2 階共変テンソルである.
- Christoffel の記号: 次の変換則に従う (テンソルでない).

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \rightarrow \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma} \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa + \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \frac{\partial^2 q^\kappa}{\partial Q^\beta \partial Q^\gamma}.$$

- (反変) ベクトル場 X^α, Y^α に対し

$$\nabla_Y X^\alpha = Y^\beta \nabla_\beta X^\alpha = Y^\beta \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial q^\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha X^\gamma \right)$$

は (反変) ベクトル場として変換することが示される.

$$\nabla_Y X^\alpha \rightarrow \tilde{\nabla}_Y \tilde{X}^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \nabla_Y X^\kappa.$$

* Christoffel の記号, 共変微分の変換則の証明は「補遺」に記す.