解析力学 (8)・力学の Riemann 幾何学 (1)〜その 2〜

幾何学的視点から

緒方秀教

電気通信大学大学院　情報・ネットワーク工学専攻

March 21, 2022

今回の内容

- 本 PC スライドは「その 1」の続きです．
- 本 PC スライド中「補遺」と記してある箇所は、「補遺」スライドを御覧ください．

Contents

平行移動

- 自由粒子に対する幾何学的方程式

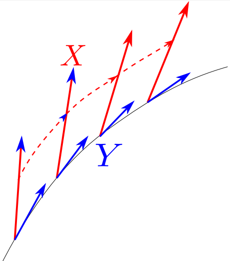
$$\frac{\mathrm{D}^2 q^\alpha}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 q^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q^\gamma}{\mathrm{d}t} = 0.$$

$\dfrac{\mathrm{D}^2 q^\alpha}{\mathrm{d}t^2} = 0$ が曲がった空間 M における真っ直ぐな運動を表す．

（定義）Riemann 空間における平行移動

ベクトル場 X はベクトル場 Y に沿っての平行移動となっている．

$$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \qquad \nabla_Y X = 0.$$



平行移動

ベクトル (X^α) が q^β-曲線に沿っての平行移動となっているとき，

$$\nabla_\beta X^\alpha = 0,$$

$$\Rightarrow \quad X^\alpha(q^\beta + \Delta q^\beta) \underbrace{- X^\alpha(q^\beta) + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} X^\gamma \Delta q^\beta}_{(1)} = 0,$$

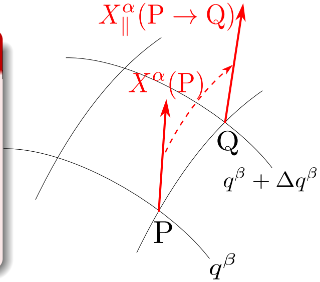
(1) を移項して「平行移動」を得る．

ベクトルの平行移動

点 $\mathrm{P}(q^\beta)$ から点 $\mathrm{Q}(q^\beta + \Delta q^\beta)$ への
ベクトル $X = (X^\alpha)$ の（微小）平行移動

$$X^\alpha_\parallel(\mathrm{P} \to \mathrm{Q}) = X^\alpha(\mathrm{P}) - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(\mathrm{P}) X^\gamma(\mathrm{P}) \Delta q^\beta.$$

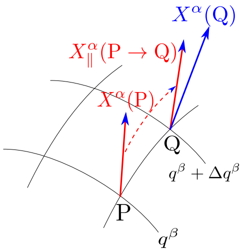
$*$ 添字 β については Einstein 規約を適用しない．



平行移動

共変微分の意味.

$$
\begin{aligned}
\nabla_\beta X^\alpha &= \frac{\partial X^\alpha}{\partial q^\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} X^\gamma \\
&= \lim_{\Delta q^\beta \to 0} \frac{X^\alpha(\mathrm{Q}) - X^\alpha_\parallel(\mathrm{P} \to \mathrm{Q})}{\Delta q^\beta} \\
&= \lim_{\Delta q^\beta \to 0} \frac{X^\alpha(q^\beta + \Delta q^\beta) - X^\alpha_\parallel(q^\beta + \Delta q^\beta)}{\Delta q^\beta}.
\end{aligned}
$$



- 点 P における接ベクトルと点 Q における接ベクトルは，全く別のベクトルである．
  （座標変換に伴う変換則が違う）
- $X(\mathrm{P})$ と $X(\mathrm{Q})$ との差をそのままとっても意味がない．
- 点 P における接ベクトル $X(\mathrm{P})$ を点 Q に平行移動して $X_\parallel(\mathrm{P} \to \mathrm{Q})$ とし，$X(\mathrm{Q})$ との差をとったものが共変微分 ∇X である．

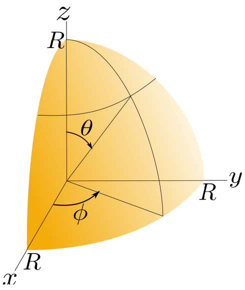
平行移動

（例）2 次元球面（半径 R）

$$M = \{\, \boldsymbol{r}(\theta, \phi) = R\sin\theta\cos\phi\, \boldsymbol{e}_x + R\sin\theta\sin\phi\, \boldsymbol{e}_y + R\cos\theta\, \boldsymbol{e}_z \,\}\,.$$

計量テンソル

$$g_{\theta\theta} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = R^2,$$
$$g_{\phi\phi} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = R^2\sin^2\theta,$$
$$g_{\theta\phi} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = 0.$$

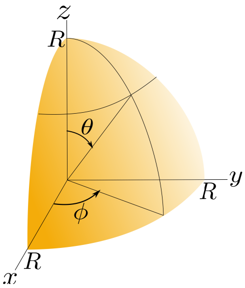


Christoffel の記号

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \cot\theta,$$

その他の成分は 0.

平行移動



接ベクトル場

$$\boldsymbol{X} = X^\theta \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} + X^\phi \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}$$

の共変微分

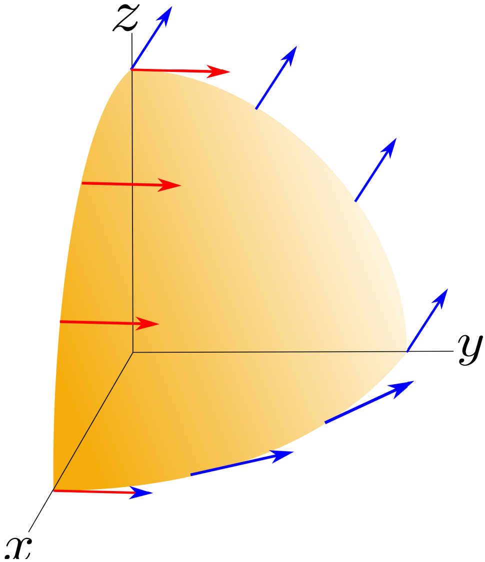
$$\nabla_\theta \boldsymbol{X} = \frac{\partial X^\theta}{\partial \theta} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial X^\phi}{\partial \theta} + \cot\theta X^\phi \right) \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi},$$

$$\nabla_\phi \boldsymbol{X} = \left(\frac{\partial X^\theta}{\partial \phi} - \sin\theta\cos\theta X^\phi \right) \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial X^\phi}{\partial \phi} + \cot\theta X^\theta \right) \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}.$$

Contents

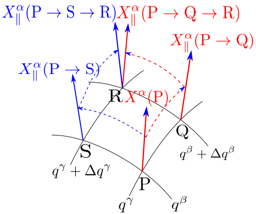
曲率

ベクトルを平行移動させると，途中経路により向きが変わる．



曲率

右図のようにベクトル X を $\mathrm{P} \to \mathrm{Q} \to \mathrm{R}$ と平行移動させるのと，$\mathrm{P} \to \mathrm{S} \to \mathrm{R}$ と平行移動させるのとでは，結果が変わる．



ベクトル X^α を $\mathrm{P} \to \mathrm{Q} \to \mathrm{R}$ と平行移動させる．

$$X^\alpha_\parallel(\mathrm{P} \to \mathrm{Q}) = X^\alpha(\mathrm{P}) - \Gamma^\kappa_{\beta\kappa}(\mathrm{P})X^\kappa(\mathrm{P})\Delta q^\beta,$$

$$\begin{aligned}
X^\alpha_\parallel(\mathrm{P} \to \mathrm{Q} \to \mathrm{R}) &= X^\alpha_\parallel(\mathrm{P} \to \mathrm{Q}) - \Gamma_{\gamma\mu}(\mathrm{Q})X^\mu_\parallel(\mathrm{P} \to \mathrm{Q})\Delta q^\gamma \\
&\simeq X^\alpha(\mathrm{P}) - \Gamma^\alpha_{\beta\kappa}(\mathrm{P})X^\kappa(\mathrm{P})\Delta q^\gamma \\
&\quad - [\Gamma^\alpha_{\gamma\mu}(\mathrm{P}) + \partial_\beta\Gamma^\alpha_{\gamma\mu}(\mathrm{P})\Delta q^\beta][X^\mu(\mathrm{P}) - \Gamma^\mu_{\beta\nu}(\mathrm{P})X^\nu\Delta q^\beta]\Delta q^\gamma \\
&\simeq X^\alpha(\mathrm{P}) - \Gamma^\alpha_{\beta\kappa}(\mathrm{P})X^\kappa(\mathrm{P})\Delta q^\beta - \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}(\mathrm{P})X^\beta(\mathrm{P})\Delta q^\gamma \\
&\quad - \partial_\beta\Gamma^\alpha_{\gamma\mu}(\mathrm{P})X^\mu(\mathrm{P})\Delta q^\beta\Delta q^\gamma + \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}(\mathrm{P})\Gamma^\mu_{\beta\nu}(\mathrm{P})\Delta q^\beta\Delta q^\gamma,
\end{aligned}$$

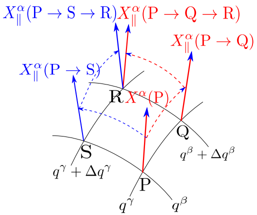
曲率

同様にして，ベクトル X^α を $\mathrm{P}\to\mathrm{S}\to\mathrm{R}$ を平行移動させると次のようになる．

$$
\begin{aligned}
X^\alpha_\parallel(\mathrm{P}\to\mathrm{S}\to\mathrm{R}) \simeq X^\alpha(\mathrm{P}) - \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}(\mathrm{P})X^\mu(\mathrm{P})\Delta q^\gamma - \Gamma^\alpha_{\beta\kappa}(\mathrm{P})X^\kappa(\mathrm{P})\Delta q^\beta \\
- \partial_\gamma\Gamma^\alpha_{\beta\mu}(\mathrm{P})X^\mu(\mathrm{P})\Delta q^\beta\Delta q^\gamma + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}(\mathrm{P})\Gamma^\mu_{\gamma\nu}(\mathrm{P})X^\nu(\mathrm{P})\Delta q^\beta\Delta q^\gamma .
\end{aligned}
$$

両者の差をとって，

$$
\begin{aligned}
&X^\alpha_\parallel(\mathrm{P}\to\mathrm{S}\to\mathrm{R}) - X^\alpha_\parallel(\mathrm{P}\to\mathrm{S}\to\mathrm{R}) \\
&\simeq (\partial_\beta\Gamma^\alpha_{\gamma\mu} - \partial_\gamma\Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\mu_{\gamma\nu} - \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}\Gamma^\mu_{\beta\nu})\Delta q^\beta\Delta q^\gamma \\
&=: R^\alpha_{\mu\beta\gamma}\Delta q^\beta\Delta q^\gamma \quad \text{曲率テンソル}.
\end{aligned}
$$

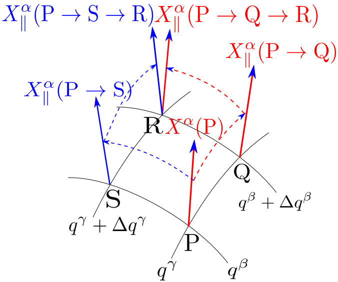


曲率

曲率テンソル

$$R^{\alpha}_{\mu\beta\gamma} := \partial_\beta \Gamma^{\alpha}_{\gamma\mu} - \partial_\gamma \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\mu}\Gamma^{\mu}_{\beta\nu}.$$

$$X^{\alpha}_{\parallel}(\mathrm{P} \to \mathrm{S} \to \mathrm{R}) - X^{\alpha}_{\parallel}(\mathrm{P} \to \mathrm{Q} \to \mathrm{R}) = R^{\alpha}_{\mu\beta\gamma}\Delta q^{\beta}\Delta q^{\gamma}.$$



曲率のもう一つの定義

反変ベクトル X, Y, Z に対し次の式で反変ベクトル $R(x, Y)Z$ を対応させる
1 階反変 3 階共変テンソル．

$$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

$$\left([X,Y] := XY - YX = (X^\alpha \partial_\alpha Y^\beta - Y^\alpha \partial_\alpha X^\beta)\partial_\beta \quad \text{交換子積} \right).$$

とくに $X = \partial_\alpha (= \partial/\partial q^\alpha)$, $Y = \partial_\beta$, $Z = \partial_\gamma$ とおくと次を得る．

$$\begin{aligned} R(\partial_\alpha, \partial_\beta)\partial_\gamma &= (\partial_\alpha \Gamma^\kappa_{\beta\gamma} - \partial_\beta \Gamma^\kappa_{\alpha\gamma} + \Gamma^\kappa_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\gamma} - \Gamma^\kappa_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\gamma})\partial_\kappa \\ &= R^\kappa_{\gamma\alpha\beta}\partial_\kappa. \end{aligned}$$

一方，f, g, h をスカラー値関数，X, Y, Z をベクトル場とすると，
次が成り立つことが示される．

$$R(fX, gY)(hZ) = fghR(X,Y)Z.$$

$$R(X,Y)Z = X^\alpha Y^\beta Z^\gamma R^\kappa_{\gamma\alpha\beta}\partial_\kappa.$$

$R^\kappa_{\gamma\alpha\beta}$ は座標変換に際し，1 階反変 3 階共変テンソルとして変換する．

曲率

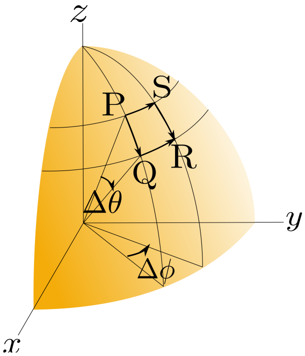
（例）2 次元球面（半径 R）

$$R^{\theta}_{\phi\theta\phi} = -R^{\theta}_{\phi\phi\theta} = \sin^2\theta, \quad R^{\phi}_{\theta\theta\phi} = -R^{\phi}_{\theta\phi\theta} = -1.$$

その他の R の成分は 0.

ベクトル場 $\boldsymbol{X} = X^{\theta}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\theta} + X^{\phi}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\phi}$ の平行移動.

$$
\begin{aligned}
&X^{\theta}_{\parallel}(\mathrm{P}\to\mathrm{S}\to\mathrm{R}) - X^{\theta}_{\parallel}(\mathrm{P}\to\mathrm{Q}\to\mathrm{R}) \\
&= 2\sin^2\theta X^{\phi}\Delta\theta\Delta\phi, \\
&X^{\phi}_{\parallel}(\mathrm{P}\to\mathrm{S}\to\mathrm{R}) - X^{\phi}_{\parallel}(\mathrm{P}\to\mathrm{Q}\to\mathrm{R}) \\
&= -2X^{\theta}\Delta\theta\Delta\phi.
\end{aligned}
$$



曲率

曲率の性質

$R_{\kappa\lambda\mu\nu} := g_{\kappa\rho}R^{\rho}_{\lambda\mu\nu}$ とおくと，

$$
\begin{gathered}
R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu}, \\
R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda}, \\
R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} + R^{\kappa}_{\mu\nu\lambda} + R^{\kappa}_{\nu\lambda\mu} = 0 \quad \text{第一 Bianchi 恒等式.}
\end{gathered}
$$

上の性質は，曲率 $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ が次のように表されることを用いれば，直ちに導かれる．

$$
\begin{aligned}
R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}&\left(\partial_\lambda\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\kappa\partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda\partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa\partial_\mu g_{\lambda\nu}\right) \\
&+ g_{\rho\sigma}(\Gamma^{\rho}_{\kappa\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\rho}_{\kappa\mu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}).
\end{aligned} \tag{1}
$$

∗ (1) の証明は「補遺」参照．

Contents

まとめ

- 拘束を受ける質点系の考察から出発して，Riemann 幾何学を構築した．
- Riemann 空間（Riemann 多様体）：計量テンソルをもつ空間（多様体）．
- 計量テンソル：Riemann 空間において曲線の「長さ」を与える．
- 共変微分：Riemann 空間に沿った変化率．
  空間の曲に対する補正が Christoffel の記号により与えられる．
- Riemann 空間に沿った平行移動．
- Christoffel の記号，曲率：Riemann 空間の曲がり具合を示す量．
  Riemann 空間の内在的な量（計量テンソル）で与えられる．
  （Riemann 空間をより大きい Euclid 空間に埋め込まなくてもよい）．

まとめ

- 拘束を受ける質点系の考察から出発して，Riemann 幾何学を構築した．
- Riemann 空間（Riemann 多様体）：計量テンソルをもつ空間（多様体）．
- 計量テンソル：Riemann 空間において曲線の「長さ」を与える．
- 共変微分：Riemann 空間に沿った変化率．
  空間の曲に対する補正が Christoffel の記号により与えられる．
- Riemann 空間に沿った平行移動．
- Christoffel の記号，曲率：Riemann 空間の曲がり具合を示す量．
  Riemann 空間の内在的な量（計量テンソル）で与えられる．
  （Riemann 空間をより大きい Euclid 空間に埋め込まなくてもよい）．

Thank you very much!