

Riemann 幾何学 (2) : ベクトル・テンソル 解析力学～幾何学的視点から (9)

緒方秀教

電気通信大学 情報・ネットワーク工学専攻

March 30, 2022

はじめに

今回の目的.

- Riemann 空間におけるスカラー・ベクトル・テンソル (場).
 - ベクトル (場) は半分復習. テンソル (場) を定義.
 - ベクトル・テンソル (場): 座標変換における変換則を満たす量の組.
- 共変微分.
 - (前回) 反変ベクトル場の共変微分.
空間の曲がり方を考慮した微分として定義.
 - (今回) 共変ベクトル場・テンソル場の共変微分.
ベクトル場・テンソル場の成分の変換則を満たすような微分として
共変微分を定義する.

- ① はじめに
- ② スカラー・ベクトル
- ③ テンソル
- ④ 添字の上下
- ⑤ ベクトル場の共変微分
- ⑥ テンソル場の共変微分
- ⑦ まとめ
- ⑧ 補遺

「補遺」は動画では説明しません。
動画で用いた PC スライドを Web サイトに置きますので、概要欄に記した URL にアクセスして御覧ください。

Contents

- ① はじめに
- ② スカラー・ベクトル
- ③ テンソル
- ④ 添字の上下
- ⑤ ベクトル場の共変微分
- ⑥ テンソル場の共変微分
- ⑦ まとめ
- ⑧ 補遺

これからやること.

- ベクトル場・テンソル場:「向き」をもつ物理量.
- 単なる数字の組ではない.

座標変換に対してベクトル場・テンソル場が矛盾なく与えられるように,
成分はある変換則に従う.

Riemann 空間 M

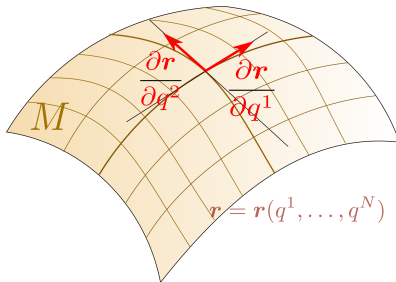
計量テンソル $g_{\mu\nu}$ により長さや曲がり具合を考慮することができる空間。

* 「テンソル」については後でちゃんと定義する。

前回の動画（解析力学 (9)）では、拘束を受ける質点系の運動する空間（配位空間）を Riemann 空間とみなした。

そして、次式で計量テンソルを定義した。

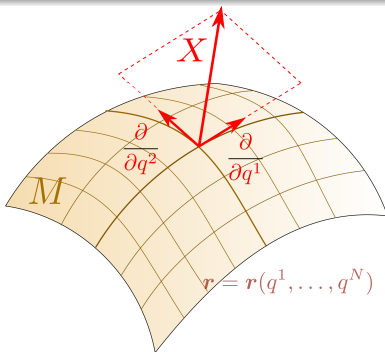
$$\text{計量テンソル } g_{\alpha\beta} := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\beta} \quad (q^1, \dots, q^N \text{ 一般座標}).$$



反変ベクトル場 (接ベクトル場)

空間 M の座標 $q^1, \dots, q^N$ を用いて次のように表される微分作用素 X .

$$X = X^\alpha(q) \partial_\alpha = X^\alpha(q) \frac{\partial}{\partial q^\alpha}, \quad X^\alpha(q) : M \text{ 上の関数.}$$



$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \rightarrow \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \quad \text{接ベクトル=方向微分, と同一視.}$$

スカラー・ベクトル

反変ベクトル場の変換規則

座標変換 $(q^1, \dots, q^N) \rightarrow (Q^1, \dots, Q^N)$ により, 反変ベクトル場 X の成分は次のように変換するとする.

$$X^\alpha \rightarrow \tilde{X}^\alpha.$$

ベクトル場の基底 $\{\partial/\partial q^\alpha\}$ は次のように変換する.

$$\frac{\partial}{\partial q^\alpha} \rightarrow \frac{\partial}{\partial Q^\alpha} = \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial}{\partial q^\kappa}.$$

接ベクトル場 X 自体は座標変換で不変なので,

$$X = X^\kappa \frac{\partial}{\partial q^\kappa} = \tilde{X}^\alpha \frac{\partial}{\partial Q^\alpha}.$$

反変ベクトル場の成分の変換規則

$$X^\alpha \rightarrow \tilde{X}^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} X^\kappa.$$

スカラー場，共変ベクトル場（1 形式）

- **スカラー**： M 上の関数で座標変換に対し不変なもの。
- **共変ベクトル場**： 反変ベクトル場をスカラー場に写す線形写像（双対ベクトル場） $\omega = (\omega_\alpha)$ 。

$$\omega : X \mapsto \langle \omega | X \rangle = \omega_\alpha X^\alpha \quad (\text{スカラー場}).$$

$\{\partial/\partial q^\alpha\}$ の双対基底 $\{dq^\alpha\}$ 。

$$\left\langle dq^\alpha \left| \frac{\partial}{\partial q^\beta} \right. \right\rangle = \delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta). \end{cases}$$

共変ベクトル場 ω は $\{dq^\alpha\}$ を用いて次のように展開される。

$$\omega = \omega_\alpha(q) dq^\alpha, \quad \omega_\alpha(q) : M \text{ 上の関数},$$

$$\langle \omega | X \rangle = \langle \omega_\alpha(q) dq^\alpha | X^\beta(q) \partial_\beta \rangle = \omega_\alpha(q) X^\beta(q) \underbrace{\left\langle dq^\alpha \left| \frac{\partial}{\partial q^\beta} \right. \right\rangle}_{\delta_\beta^\alpha} = \omega_\alpha(q) X^\alpha(q).$$

スカラー・ベクトル

共変ベクトル場 (1 形式) の変換規則

座標変換 $(q^1, \dots, q^N) \rightarrow (Q^1, \dots, Q^N)$ により, 共変ベクトル場 ω の成分は次のように変換するとする.

$$\omega_\alpha(q) \rightarrow \tilde{\omega}_\alpha(Q).$$

任意の反変ベクトル場 X に対し, $\langle \omega | X \rangle$ はスカラー, すなわち, 座標変換で不変であるから,

$$\tilde{\omega}_\alpha \tilde{X}^\alpha = \omega_\alpha X^\alpha.$$

これと, $\tilde{X}^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} X^\kappa$ より

共変ベクトル場 (1 形式) の成分の変換規則

$$\omega_\alpha \rightarrow \tilde{\omega}_\alpha = \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \omega_\kappa.$$

この変換規則は次からも導かれる

$$dQ^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} dq^\kappa.$$

- ① はじめに
- ② スカラー・ベクトル
- ③ テンソル**
- ④ 添字の上下
- ⑤ ベクトル場の共変微分
- ⑥ テンソル場の共変微分
- ⑦ まとめ
- ⑧ 補遺

テンソル

2 階共変テンソル場

2 個の反変ベクトル場をスカラー値関数に写す双線形写像 $\omega = (\omega_{\alpha\beta})$.

$$\omega : X, Y \mapsto \langle \omega | X, Y \rangle = \omega_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta \quad (\text{スカラー場}).$$

テンソル場 ω は次のように展開される.

$$\omega = \omega_{\alpha\beta}(q) dq^\alpha \otimes dq^\beta, \quad \omega_{\alpha\beta}(q) : M \text{ 上の関数}.$$

テンソル積 $dq^\alpha \otimes dq^\beta$ ($\otimes \dots$ 「直積」 に線形演算のルールを付け加えたもの)

$$\left\langle dq^\alpha \otimes dq^\beta \left| \frac{\partial}{\partial q^\lambda}, \frac{\partial}{\partial q^\delta} \right. \right\rangle := \left\langle dq^\alpha \left| \frac{\partial}{\partial q^\lambda} \right. \right\rangle \left\langle dq^\beta \left| \frac{\partial}{\partial q^\delta} \right. \right\rangle = \delta_\lambda^\alpha \delta_\delta^\beta.$$

$$\begin{aligned} \langle \omega | X, Y \rangle &= \left\langle \omega_{\alpha\beta} dq^\alpha \otimes dq^\beta \left| X^\lambda \frac{\partial}{\partial q^\lambda}, Y^\delta \frac{\partial}{\partial q^\delta} \right. \right\rangle \\ &= \omega_{\alpha\beta} X^\lambda Y^\delta \left\langle dq^\alpha \otimes dq^\beta \left| \frac{\partial}{\partial q^\lambda}, \frac{\partial}{\partial q^\delta} \right. \right\rangle = \omega_{\alpha\beta} X^\lambda Y^\delta \delta_\lambda^\alpha \delta_\delta^\beta = \omega_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta. \end{aligned}$$

テンソル

2 階共変テンソル場の変換規則

座標変換 $(q^1, \dots, q^N) \rightarrow (Q^1, \dots, Q^N)$ により, 2 階共変テンソル場 ω の成分は次のように変換するとする.

$$\omega_{\alpha\beta}(q) \rightarrow \tilde{\omega}_{\alpha\beta}(Q).$$

任意の反変ベクトル場 X, Y に対し, $\langle \omega | X, Y \rangle$ はスカラー, すなわち, 座標変換で不変であるから,

$$\tilde{\omega}_{\alpha\beta} \tilde{X}^\alpha \tilde{Y}^\beta = \omega_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta.$$

これと, $\tilde{X}^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} X^\kappa$, $\tilde{Y}^\beta = \frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda} Y^\lambda$, より,

2 階共変テンソル場の成分の変換規則

$$\omega_{\alpha\beta} \rightarrow \tilde{\omega}_{\alpha\beta} = \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} \omega_{\kappa\lambda}.$$

$$\text{右の式からも導出できる} \quad dQ^\alpha \otimes dQ^\beta = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda} dq^\kappa \otimes dq^\lambda.$$

テンソル

2 階反変テンソル場

2 階共変テンソル場をスカラー値関数に写す双線形写像 $T = (T^{\alpha\beta})$.

$$T : \omega \mapsto \langle \omega | T \rangle = \omega_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \quad (\text{スカラー場}).$$

テンソル場 T は次のように展開される.

$$T = T^{\alpha\beta}(q) \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial q^\beta}, \quad T^{\alpha\beta}(q) : M \text{ 上の関数}.$$

テンソル積 $\frac{\partial}{\partial q^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial q^\beta}$

$$\left\langle dq^\alpha \otimes dq^\beta \left| \frac{\partial}{\partial q^\lambda} \otimes \frac{\partial}{\partial q^\delta} \right. \right\rangle := \left\langle dq^\alpha \left| \frac{\partial}{\partial q^\lambda} \right. \right\rangle \left\langle dq^\beta \left| \frac{\partial}{\partial q^\delta} \right. \right\rangle = \delta_\lambda^\alpha \delta_\delta^\beta.$$

$$\begin{aligned} \langle \omega | T \rangle &= \left\langle \omega_{\alpha\beta} dq^\alpha \otimes dq^\beta \left| T^{\lambda\delta} \frac{\partial}{\partial q^\lambda} \otimes \frac{\partial}{\partial q^\delta} \right. \right\rangle \\ &= \omega_{\alpha\beta} T^{\lambda\delta} \left\langle dq^\alpha \otimes dq^\beta \left| \frac{\partial}{\partial q^\lambda}, \frac{\partial}{\partial q^\delta} \right. \right\rangle = \omega_{\alpha\beta} T^{\lambda\delta} \delta_\lambda^\alpha \delta_\delta^\beta = \omega_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

テンソル

2 階反変テンソル場の変換規則

座標変換 $(q^1, \dots, q^N) \rightarrow (Q^1, \dots, Q^N)$ により, 2 階反変テンソル場 T の成分は次のように変換するとする.

$$T^{\alpha\beta}(q) \rightarrow \tilde{T}^{\alpha\beta}(Q).$$

任意の 2 階共変ベクトル場 ω に対し, $\langle \omega | \omega \rangle$ はスカラー, すなわち, 座標変換で不変であるから,

$$\tilde{\omega}_{\alpha\beta} \tilde{T}^{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}.$$

これと, $\tilde{\omega}_{\alpha\beta} = \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} \omega_{\kappa\lambda}$ より,

2 階反変テンソル場の成分の変換規則

$$T^{\alpha\beta} \rightarrow \tilde{T}^{\alpha\beta} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda} T^{\kappa\lambda}.$$

右の式からも導出できる $\frac{\partial}{\partial Q^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial Q^\beta} = \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} \frac{\partial}{\partial q^\kappa} \otimes \frac{\partial}{\partial q^\lambda}.$

テンソル

2 階共変テンソル場 ω : 2 つの反変ベクトル場をスカラー場に写す写像

→ 2 階反変ベクトル場をスカラー場に写す写像に拡張される.

$$\omega = \omega_{\alpha\beta} dq^\alpha \otimes dq^\beta, \quad T = T^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial q^\beta} \text{ に対し,}$$

$$\begin{aligned} \langle \omega | T \rangle &= \left\langle \omega_{\alpha\beta} dq^\alpha \otimes dq^\beta \left| T^{\lambda\delta} \frac{\partial}{\partial q^\lambda} \otimes \frac{\partial}{\partial q^\delta} \right. \right\rangle \\ &= \omega_{\alpha\beta} T^{\lambda\delta} \left\langle dq^\alpha \otimes dq^\beta \left| \frac{\partial}{\partial q^\lambda} \otimes \frac{\partial}{\partial q^\delta} \right. \right\rangle = \omega_{\alpha\beta} T^{\lambda\delta} \delta_\lambda^\alpha \delta_\delta^\beta = \omega_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

2 つの反変ベクトル場の組 $(X, Y) \rightarrow$ 次の 2 階反変ベクトル場と同一視する.

$$\begin{aligned} X \otimes Y &:= X^\alpha Y^\beta \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial q^\beta}. \\ \langle \omega | X, Y \rangle &= \langle \omega | X \otimes Y \rangle. \end{aligned}$$

テンソル

(1,1) 型テンソル場

共変ベクトル場 $\omega = \omega_\alpha dq^\alpha$ と反変ベクトル場 $X = X^\alpha \partial_\alpha$ をスカラー値関数に写す双線形写像 $T = (T^\alpha_\beta)$.

$$T : (\omega, X) \mapsto \langle T | \omega, X \rangle := \omega_\alpha T^\alpha_\beta X^\beta \quad (\text{スカラー場}).$$

テンソル場 T は次のように展開される.

$$T = T^\alpha_\beta(q) \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \otimes dq^\beta, \quad T^\alpha_\beta(q) : M \text{ 上の関数.}$$

テンソル積 $\frac{\partial}{\partial q^\alpha} \otimes dq^\beta \dots$ 次で定義される線形写像.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \otimes dq^\beta \middle| dq^\lambda, \frac{\partial}{\partial q^\delta} \right\rangle &:= \left\langle dq^\lambda \middle| \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \right\rangle \left\langle dq^\beta \middle| \frac{\partial}{\partial q^\delta} \right\rangle = \delta_\alpha^\lambda \delta_\delta^\beta, \\ \langle T | \omega, X \rangle &= \left\langle T^\alpha_\beta \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \otimes dq^\beta \middle| \omega_\lambda dq^\lambda, X^\delta \frac{\partial}{\partial q^\delta} \right\rangle \\ &= T^\alpha_\beta \omega_\lambda X^\delta \left\langle \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \otimes dq^\beta \middle| dq^\lambda, \frac{\partial}{\partial q^\delta} \right\rangle = T^\alpha_\beta \omega_\lambda X^\delta \delta_\alpha^\lambda \delta_\delta^\beta = \omega_\alpha T^\alpha_\beta X^\beta. \end{aligned}$$

テンソル

共変ベクトル場 ω と反変ベクトル場 X の組 (ω, X)

→ 次のようにして (1,1) 型テンソル場と同一視してもよい.

$$\begin{aligned} \left(\omega_\alpha dq^\alpha, X^\beta \frac{\partial}{\partial q^\beta} \right) &\leftrightarrow \omega_\alpha X^\beta dq^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial q^\beta}. \\ \left\langle T^\alpha{}_\beta \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \otimes dq^\beta \middle| \omega_\lambda X^\delta \otimes dq^\lambda \frac{\partial}{\partial q^\delta} \right\rangle &= \omega_\lambda T^\alpha{}_\beta X^\delta \left\langle \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \otimes dq^\beta \middle| dq^\lambda \otimes \frac{\partial}{\partial q^\delta} \right\rangle \\ &= \omega_\lambda T^\alpha{}_\beta X^\delta \left\langle dq^\lambda \middle| \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \right\rangle \left\langle dq^\beta \middle| \frac{\partial}{\partial q^\delta} \right\rangle \\ &= \omega_\lambda T^\alpha{}_\beta X^\delta \delta_\alpha^\lambda \delta_\delta^\beta = \omega_\alpha T^\alpha{}_\beta X^\beta. \end{aligned}$$

2つのテンソル場 $T^\alpha{}_\beta \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \otimes dq^\beta$, $S_\lambda{}^\delta dq^\lambda \otimes \frac{\partial}{\partial q^\delta}$ のカップリング.

$$\begin{aligned} \left\langle T^\alpha{}_\beta \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \otimes dq^\beta \middle| S_\lambda{}^\delta dq^\lambda \otimes \frac{\partial}{\partial q^\delta} \right\rangle &= T^\alpha{}_\beta S_\lambda{}^\delta \left\langle \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \otimes dq^\beta \middle| dq^\lambda \otimes \frac{\partial}{\partial q^\delta} \right\rangle \\ &= T^\alpha{}_\beta S_\lambda{}^\delta \delta_\alpha^\lambda \delta_\delta^\beta = T^\alpha{}_\beta S_\alpha{}^\beta. \end{aligned}$$

テンソル

(1, 1) 型テンソル場の変換規則

座標変換 $(q^1, \dots, q^N) \rightarrow (Q^1, \dots, Q^N)$ により, (1, 1) 型テンソル場 T の成分は次のように変換するとする.

$$T^\alpha{}_\beta(q) \rightarrow \tilde{T}^\alpha{}_\beta(Q).$$

任意の共変ベクトル場 (1 形式) ω , 反変ベクトル場 X に対し, $\langle T | \omega, X \rangle$ はスカラー, すなわち, 座標変換で不変であるから,

$$\tilde{\omega}_\alpha \tilde{T}^\alpha{}_\beta \tilde{X}^\beta = \omega_\alpha T^\alpha{}_\beta X^\beta.$$

これと, $\tilde{\omega}_\alpha = \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \omega_\kappa$, $\tilde{X}^\beta = \frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda} X^\lambda$ より,

(1, 1) 型テンソル場の成分の変換規則

$$T^\alpha{}_\beta \rightarrow \tilde{T}^\alpha{}_\beta = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} T^\alpha{}_\beta.$$

テンソル

(k, l) 型テンソル場 T と (l, k) 型テンソル場 S .

$$T = T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l}(q) \frac{\partial}{\partial q^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial q^{\alpha_k}} \otimes dq^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dq^{\beta_k},$$

$$S = S_{\delta_1 \dots \delta_k}^{\lambda_1 \dots \lambda_l}(q) dq^{\delta_1} \otimes \dots \otimes dq^{\delta_k} \otimes \frac{\partial}{\partial q^{\lambda_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial q^{\lambda_l}}.$$

T と S のカップリング.

$$\langle T|S \rangle = T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} S_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{\beta_1 \dots \beta_l}.$$

(k, l) 型テンソル場の成分の変換規則

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} \rightarrow \tilde{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} = \frac{\partial Q^{\alpha_1}}{\partial q^{\kappa_1}} \dots \frac{\partial Q^{\alpha_k}}{\partial q^{\kappa_k}} \frac{\partial q^{\lambda_1}}{\partial Q^{\beta_1}} \dots \frac{\partial q^{\lambda_l}}{\partial Q^{\beta_l}} T^{\kappa_1 \dots \kappa_k}_{\lambda_1 \dots \lambda_l}.$$

- 計量テンソル：反変ベクトル場 $\leftrightarrow$ 共変ベクトル場.
- 反変ベクトル：上付き添字，共変ベクトル：下付き添字.
計量テンソル：添字の上げ下げを行う.

添字の上下

X^α : 反変ベクトル場の成分 (上付き添字) .

座標変換 $(q^1, \dots, q^N) \rightarrow (Q^1, \dots, Q^N)$ に際し次の変換則に従う.

$$X^\alpha \rightarrow \tilde{X}^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} X^\kappa.$$

下付き添字の量 X_α の組を次で定義する.

$$X_\alpha := g_{\alpha\beta} X^\beta.$$

X_α は共変ベクトル場の成分の変換則に従う.

$$\begin{aligned} X_\alpha \rightarrow \tilde{X}_\alpha &= \tilde{g}_{\alpha\beta} \tilde{X}^\beta = \left(\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} g_{\kappa\lambda} \right) \left(\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\mu} X^\mu \right) \\ &= \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \underbrace{\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} \frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\mu}}_{\delta_\mu^\lambda} g_{\kappa\lambda} X^\mu = \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} g_{\kappa\lambda} X^\lambda = \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} X_\kappa. \\ X_\alpha \rightarrow \tilde{X}_\alpha &= \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} X_\kappa. \end{aligned}$$

X_α は共変ベクトル場 (下付き添字) の成分である.

添字の上下

一方, ω_α を共変ベクトル場 (1 形式, 下付き添字) の成分とすると,

$$\omega^\alpha := g^{\alpha\beta} \omega_\beta$$

は反変ベクトル場の成分 (上付き添字) になることが示される.

反変ベクトル場 $\leftrightarrow$ 共変ベクトル場

$$\text{反変ベクトル場 } X^\alpha = g^{\alpha\beta} X_\beta \quad \leftrightarrow \quad \text{共変ベクトル場 } \omega_\alpha = g_{\alpha\beta} \omega^\beta.$$

計量テンソル g により添字を上下する.

テンソル場の成分についても同様の操作により添字の上下を行う.

$$2 \text{ 階共変テンソル場 } \omega_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma} \omega^\gamma_\beta \quad \leftrightarrow \quad (1, 1) \text{ 型テンソル場 } \omega^\alpha_\beta = g^{\alpha\gamma} \omega_{\gamma\beta}.$$

$$(1, 1) \text{ 型テンソル場 } T^\alpha_\beta = g^{\alpha\gamma} T_{\gamma\beta} \quad \leftrightarrow \quad 2 \text{ 階反変テンソル場 } T^{\alpha\beta} = g^{\beta\gamma} T^\alpha_\gamma.$$

$$2 \text{ 階共変テンソル場 } \omega_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} \omega^{\gamma\delta}$$

$$\leftrightarrow 2 \text{ 階反変テンソル場 } \omega^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \omega_{\gamma\delta}.$$

Contents

- ① はじめに
- ② スカラー・ベクトル
- ③ テンソル
- ④ 添字の上下
- ⑤ ベクトル場の共変微分
- ⑥ テンソル場の共変微分
- ⑦ まとめ
- ⑧ 補遺

ベクトル場の共変微分

(前回) 反変ベクトル場の共変微分を定義した.

Riemann 空間は曲がっている $\rightarrow$ 従来の微分を修正.

これからやること

- 反変ベクトル場の共変微分 $\nabla_Y X$ の再導出.

$\nabla_Y X$ の成分はベクトル場の成分の変換則に従うという要請から共変微分を定義することもできる.

- 共変ベクトル場 (1 形式), テンソル場に対する共変微分の定義.

ベクトル場の共変微分

接ベクトル場（反変ベクトル場） $Y = Y^\alpha \partial_\alpha$ 方向の方向微分.

$$\partial_Y := Y^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha}.$$

スカラー場 f の Y 方向微分.

$$\partial_Y f = Y^\alpha \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}.$$

座標変換 $(q^1, \dots, q^N) \rightarrow (Q^1, \dots, Q^N)$ に対する $\partial_Y f$ の変換.

$$\partial_Y f = Y^\alpha \frac{\partial f}{\partial q^\alpha} \rightarrow \tilde{Y}^\alpha \frac{\partial f}{\partial Q^\alpha} = Y^\kappa \underbrace{\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\alpha}}_{\delta_\kappa^\lambda} \frac{\partial f}{\partial q^\lambda} = Y^\kappa \frac{\partial f}{\partial q^\kappa}.$$

$\therefore \partial_Y f$ はスカラー場である.

ベクトル場の共変微分

では、反変ベクトル場 X の成分 X^α に対し、 $\partial_Y X^\alpha = Y^\beta \partial_\beta X^\alpha$ は反変ベクトル場の成分の変換則に従うか？

そうなるためには、 $\frac{\partial X^\alpha}{\partial q^\beta}$ は次のように変換しなければならない。

$$\frac{\partial X^\alpha}{\partial q^\beta} \rightarrow \frac{\partial \tilde{X}^\alpha}{\partial Q^\beta} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} \frac{\partial X^\kappa}{\partial q^\lambda} ?$$

(注意) Y^α は次のように変換する。

$$Y^\alpha \rightarrow \tilde{Y}^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} Y^\kappa.$$

しかし、実際は次のように変換する。

$$\frac{\partial \tilde{X}^\alpha}{\partial Q^\beta} = \frac{\partial}{\partial Q^\beta} \left(\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} X^\kappa \right) = \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \frac{\partial X^\kappa}{\partial q^\lambda} + \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa \partial q^\lambda} X^\kappa.$$

$\partial_Y X^\alpha$ は反変ベクトルの変換則に従わない。

ベクトル場の共変微分

方向微分 $\partial_Y X$ を修正し, 新しい方向微分 $\nabla_Y X$ を定義する.

$$\nabla_Y X^\alpha = Y^\beta \nabla_\beta X^\alpha \quad (\nabla_\beta = \nabla_{\partial_\beta}).$$

- $\nabla_Y X^\alpha$ は反変ベクトル場の変換則に従うようにしたい.
- $\rightarrow \nabla_\beta X^\alpha$ は $(1, 1)$ 型テンソル場の成分の変換則に従わなければならない.

$$\nabla_\beta X^\alpha \rightarrow \tilde{\nabla}_\beta \tilde{X}^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \frac{\partial q^\gamma}{\partial Q^\beta} \nabla_\lambda X^\kappa.$$

微分作用素は線形であるのが自然だから, 次の形においてみる.

$$\nabla_\beta X^\alpha = \frac{\partial X^\beta}{\partial q^\beta} + C_{\beta\gamma}^\alpha X^\gamma.$$

$\nabla_\beta X^\alpha$ が $(1, 1)$ 型テンソル場の変換則に従うという要請から, $C_{\beta\gamma}^\alpha$ を決定する.

ベクトル場の共変微分

- 共変微分は変換則に従う。

$$\tilde{\nabla}_\beta \tilde{X}^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \frac{\partial q^\gamma}{\partial Q^\beta} \nabla_\lambda X^\kappa = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \frac{\partial q^\gamma}{\partial Q^\beta} \left(\frac{\partial X^\kappa}{\partial q^\lambda} + C_{\lambda\mu}^\kappa X^\mu \right).$$

- 新座標での共変微分. 座標変換で $C_{\beta\gamma}^\alpha \rightarrow \tilde{C}_{\beta\gamma}^\alpha$ となるとすれば,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\beta \tilde{X}^\alpha &= \frac{\partial \tilde{X}^\alpha}{\partial Q^\beta} + \tilde{C}_{\beta\gamma}^\alpha \tilde{X}^\gamma \\ &= \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} \frac{\partial X^\kappa}{\partial q^\lambda} + \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\beta} \frac{\partial^2 Q^\alpha}{\partial q^\kappa \partial q^\lambda} X^\lambda + \tilde{C}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial Q^\gamma}{\partial q^\kappa} X^\kappa. \end{aligned}$$

2つの式を比較して,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\lambda} \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\beta} C_{\mu\kappa}^\lambda &= \tilde{C}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial Q^\gamma}{\partial q^\kappa} + \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} \frac{\partial^2 Q^\alpha}{\partial q^\kappa \partial q^\lambda}, \\ \therefore C_{\lambda\mu}^\kappa &= \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda} \frac{\partial Q^\gamma}{\partial q^\mu} \tilde{C}_{\beta\gamma}^\alpha + \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial^2 Q^\alpha}{\partial q^\lambda \partial q^\mu}. \end{aligned}$$

これは Christoffel の記号 $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ の変換則と一致する。

ベクトル場の共変微分

そこで、 $C_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ において新しい微分演算子 ∇ を定義する.

反変ベクトル場の共変微分

反変ベクトル場 X の反変ベクトル場 Y 方向の方向共変微分 $\nabla_Y X = \nabla_Y X^{\alpha} \partial_{\alpha}$.

$$\nabla_Y X^{\alpha} := Y^{\beta} \nabla_{\beta} X^{\alpha}, \quad \nabla_{\beta} X^{\alpha} := \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial q^{\beta}} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} X^{\gamma}.$$

【復習】Christoffel の記号

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} := \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial q^{\beta}} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial q^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^{\delta}} \right).$$

$\nabla_{\beta} X^{\alpha}$ は $(1, 1)$ 型テンソル場の変換則に従う.

$$\nabla_{\beta} X^{\alpha} \rightarrow \tilde{\nabla}_{\beta} \tilde{X}^{\alpha} = \frac{\partial Q^{\alpha}}{\partial q^{\kappa}} \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial Q^{\beta}} \nabla_{\lambda} X^{\kappa}.$$

方向共変微分の成分 $\nabla_Y X^{\alpha}$ は反変ベクトル場の変換則に従う.

$$\nabla_Y X^{\alpha} \rightarrow \tilde{\nabla}_Y \tilde{X}^{\alpha} = \frac{\partial Q^{\alpha}}{\partial q^{\kappa}} \nabla_Y X^{\kappa}.$$

ベクトル場の共変微分

共変ベクトル場 (1 形式) ω の方向微分 $\nabla_Y \omega = Y^\alpha \nabla_\alpha \omega$.

- $\nabla_Y \omega_\alpha$ が座標変換で共変ベクトル場の成分の変換則に従うようにしたい.
- $\rightarrow \nabla_\beta \omega_\alpha$ は 2 階共変テンソル場の成分の変換則に従わなければならない.

$$\nabla_\beta \omega_\alpha \rightarrow \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\omega}_\alpha = \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} \nabla_\lambda \omega_\kappa.$$

反変ベクトル場の場合と同様にして $\nabla_\beta \omega_\alpha$ を求める.

$$\nabla_\beta \omega_\alpha = \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial q^\beta} + B_{\beta\alpha}^\gamma \omega_\gamma$$

とおくと, 上の要請から $B_{\beta\gamma}^\alpha$ は次の変換則を満たさなければならない.

$$B_{\beta\alpha}^\gamma \rightarrow \tilde{B}_{\beta\alpha}^\gamma = \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial Q^\gamma}{\partial q^\mu} B_{\lambda\kappa}^\mu - \frac{\partial Q^\gamma}{\partial q^\kappa} \frac{\partial^2 q^\kappa}{\partial Q^\beta \partial Q^\alpha}.$$

これは $-\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$ の変換則に一致する.

ベクトル場の共変微分

共変ベクトル場の共変微分

共変ベクトル場 ω の反変ベクトル場 Y 方向の方向共変微分 $\nabla_Y \omega = \nabla_Y \omega_\alpha dq^\alpha$.

$$\nabla_Y \omega_\alpha = Y^\beta \nabla_\beta \omega_\alpha, \quad \nabla_\beta \omega_\alpha := \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial q^\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \omega_\gamma.$$

$\nabla_\beta \omega_\alpha$ は 2 階共変テンソル場の成分の変換則に従う.

$$\nabla_\beta \omega_\alpha \rightarrow \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\omega}_\alpha = \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} \nabla_\lambda \omega_\kappa.$$

$\nabla_Y \omega_\alpha = Y^\beta \nabla_\beta \omega_\alpha$ は共変ベクトル場 (1 形式) の成分の変換則に従う.

$$\nabla_Y \omega_\alpha \rightarrow \tilde{\nabla}_Y \tilde{\omega}_\alpha = \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \nabla_Y \omega_\kappa.$$

ベクトル場の共変微分

Leibniz 則

共変微分は Leibniz 則に従う。

$$\begin{aligned}\partial_Y \langle \omega | X \rangle &= \nabla_Y \langle \omega | X \rangle = \langle \nabla_Y \omega | X \rangle + \langle \omega | \nabla_Y X \rangle, \\ \partial_\beta \langle \omega | X \rangle &= \nabla_\beta \langle \omega | X \rangle = \langle \nabla_\beta \omega | X \rangle + \langle \omega | \nabla_\beta X \rangle.\end{aligned}$$

* スカラー場の共変微分は通常の微分とする（スカラーは「方向」を持たないから）。

【証明】

$$\begin{aligned}\langle \nabla_\beta \omega | X \rangle + \langle \omega | \nabla_\beta X \rangle &= (\nabla_\beta \omega_\alpha) X^\alpha + \omega_\alpha (\nabla_\beta X^\alpha) \\ &= (\partial_\beta \omega_\alpha - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \omega_\gamma) X^\alpha + \omega_\alpha (\partial_\beta X^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha X^\gamma) \\ &= (\partial_\beta \omega_\alpha) X^\alpha + \omega_\alpha (\partial_\beta X^\alpha) = \partial_\beta (\omega_\alpha X^\alpha) = \partial_\beta \langle \omega | X \rangle.\end{aligned}$$

□

Leibniz 則を満たすという要請より共変ベクトル場の共変微分を定義することもできる（そのほうが一般的）。

- ① はじめに
- ② スカラー・ベクトル
- ③ テンソル
- ④ 添字の上下
- ⑤ ベクトル場の共変微分
- ⑥ テンソル場の共変微分
- ⑦ まとめ
- ⑧ 補遺

テンソル場の共変微分

2 階共変ベクトル場 ω の反変ベクトル場 Y 方向の方向共変微分 $\nabla_Y \omega$ をこれから定義する.

- $\nabla_Y \omega_{\alpha\beta}$ は 2 階共変テンソル場の成分の変換則に従うようにしたい.
- $\nabla_\gamma \omega_{\alpha\beta}$ は 3 階共変テンソル場の成分の変換則に従わなければならない.

$$\nabla_\gamma \omega_{\alpha\beta} \rightarrow \tilde{\nabla}_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha\beta} = \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma} \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} \nabla_\mu \omega_{\kappa\lambda}.$$

$\nabla_\gamma \omega_{\alpha\beta}$ を次の形においてみる.

$$\nabla_\gamma \omega_{\alpha\beta} = \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} + B_{\gamma\alpha}^\delta \omega_{\delta\beta} + C_{\gamma\beta}^\delta \omega_{\alpha\delta}$$

上の要請から $-B, -C$ は Γ と同じ変換則に従うことが示される.

2 階共変テンソル場の共変微分

2 階共変テンソル場 ω の反変ベクトル場 Y 方向の方向共変微分.

$$\nabla_Y \omega_{\alpha\beta} := Y^\gamma \nabla_\gamma \omega_{\alpha\beta}, \quad \nabla_\gamma \omega_{\alpha\beta} := \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} - \Gamma_{\gamma\alpha}^\delta \omega_{\delta\beta} - \Gamma_{\gamma\beta}^\delta \omega_{\alpha\delta}.$$

テンソル場の共変微分

- 2 階反変テンソル場 T の反変ベクトル場 Y 方向の方向共変微分.

$$\nabla_Y T^{\alpha\beta} := Y^\gamma \nabla_\gamma T^{\alpha\beta}, \quad \nabla_\gamma T^{\alpha\beta} := \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} + \Gamma_{\gamma\delta}^{\alpha} T^{\delta\beta} + \Gamma_{\gamma\delta}^{\beta} T^{\alpha\delta}.$$

- $(1, 1)$ 型テンソル場 T の反変ベクトル場 Y 方向の方向共変微分.

$$\nabla_Y T^\alpha{}_\beta := Y^\gamma \nabla_\gamma T^\alpha{}_\beta, \quad \nabla_\gamma T^\alpha{}_\beta := \frac{\partial T^\alpha{}_\beta}{\partial q^\gamma} + \Gamma_{\gamma\delta}^{\alpha} T^\delta{}_\beta - \Gamma_{\gamma\beta}^{\delta} T^\alpha{}_\delta.$$

テンソル場の共変微分

テンソル場の共変微分

一般の型のテンソル場 T の反変ベクトル場 Y 方向の方向共変微分.

$$\begin{aligned}\nabla_Y T^{\alpha\beta\dots}_{\gamma\delta\dots} &:= Y^\kappa \nabla_\kappa T^{\alpha\beta\dots}_{\gamma\delta\dots}, \\ \nabla_\kappa T^{\alpha\beta\dots}_{\gamma\delta\dots} &:= \frac{\partial T^{\alpha\beta\dots}_{\gamma\delta\dots}}{\partial q^\kappa} + \Gamma_{\kappa\lambda}^\alpha T^{\lambda\beta\dots}_{\gamma\delta\dots} + \Gamma_{\kappa\lambda}^\beta T^{\alpha\lambda\dots}_{\gamma\delta\dots} + \dots \\ &\quad - \Gamma_{\kappa\gamma}^\lambda T^{\alpha\beta\dots}_{\lambda\delta\dots} - \Gamma_{\kappa\delta}^\lambda T^{\alpha\beta\dots}_{\gamma\lambda\dots} - \dots.\end{aligned}$$

テンソル場の共変微分の成分：テンソル場の成分の変換則に従う.

$$\nabla_\kappa T^{\alpha\beta\dots}_{\gamma\delta\dots} \rightarrow \tilde{\nabla}_\kappa \tilde{T}^{\alpha\beta\dots}_{\gamma\delta\dots} = \frac{\partial q^\rho}{\partial Q^\kappa} \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\sigma} \frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\tau} \dots \frac{\partial q^\xi}{\partial Q^\gamma} \frac{\partial q^\eta}{\partial Q^\delta} \dots \nabla_\rho T^{\xi\eta\dots}_{\sigma\tau\dots}.$$

* (1, 1) 型テンソル場の共変微分の導出のみ, PC スライド末尾の「補遺」に記します.
概要欄の URL にアクセスして PC スライドを御覧ください.

テンソル場の共変微分

Leibniz 則

ω : 2 階共変テンソル場, X, Y, Z : 反変ベクトル場.

$$\partial_Z \langle \omega | X, Y \rangle = \langle \nabla_Z \omega | X, Y \rangle + \langle \omega | \nabla_Z X, Y \rangle + \langle \omega | X, \nabla_Z Y \rangle,$$

$$\partial_\gamma \langle \omega | X, Y \rangle = \langle \nabla_\gamma \omega | X, Y \rangle + \langle \omega | \nabla_\gamma X, Y \rangle + \langle \omega | X, \nabla_\gamma Y \rangle.$$

【証明】 第 2 式のみ示す．直接計算により示される．

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= (\nabla_\gamma \omega_{\alpha\beta}) X^\alpha Y^\beta + \omega_{\alpha\beta} (\nabla_\gamma X^\alpha) Y^\beta + \omega_{\alpha\beta} X^\alpha (\nabla_\gamma Y^\beta) \\ &= (\partial_\gamma \omega_{\alpha\beta} - \Gamma_{\gamma\alpha}^\delta \omega_{\delta\beta} - \Gamma_{\gamma\beta}^\delta \omega_{\alpha\delta}) X^\alpha Y^\beta + \omega_{\alpha\beta} (\partial_\gamma X^\alpha + \Gamma_{\gamma\delta}^\alpha X^\delta) Y^\beta \\ &\quad + \omega_{\alpha\beta} X^\alpha (\partial_\gamma Y^\beta + \Gamma_{\gamma\delta}^\beta Y^\delta) \\ &= (\partial_\gamma \omega_{\alpha\beta}) X^\alpha Y^\beta + \omega_{\alpha\beta} (\partial_\gamma X^\alpha) Y^\beta + \omega_{\alpha\beta} X^\alpha (\partial_\gamma Y^\beta) \\ &= \partial_\gamma (\omega_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta) = \text{左辺}. \end{aligned}$$

□

他の型のベクトル場・テンソル場のカップリングに対しても同様の Leibniz 則が成立する．

テンソル場の共変微分

計量テンソルの共変微分はゼロ

$$\nabla_Y g = 0, \quad \nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0.$$

【証明】 Γ の表式を用いて直接計算.

$$\begin{aligned}\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} &= \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\gamma\alpha}^\delta g_{\delta\beta} - \Gamma_{\gamma\beta}^\delta g_{\alpha\delta} \\&= \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\delta\epsilon} (\partial_\gamma g_{\epsilon\alpha} + \partial_\alpha g_{\epsilon\gamma} - \partial_\epsilon g_{\gamma\alpha}) g_{\delta\beta} \\&\quad - \frac{1}{2} g^{\delta\epsilon} (\partial_\gamma g_{\epsilon\beta} + \partial_\beta g_{\epsilon\gamma} - \partial_\epsilon g_{\gamma\beta}) g_{\alpha\delta} \\&\quad (g^{\delta\epsilon} g_{\delta\beta} = \delta_\beta^\epsilon \text{ を用いて}) \\&= \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (\partial_\gamma g_{\beta\alpha} + \partial_\alpha g_{\beta\gamma} - \partial_\beta g_{\gamma\alpha}) - \frac{1}{2} (\partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha g_{\gamma\beta}) \\&= 0.\end{aligned}$$

□

テンソル場の共変微分

Leibniz 則と $\nabla_Z g = 0$ より, 任意の反変ベクトル場 X, Y, Z に対し

$$\partial_Z \langle g | X, Y \rangle = \nabla_Z \langle g | X, Y \rangle = \langle g | \nabla_Z X, Y \rangle + \langle g | X, \nabla_Z Y \rangle.$$

したがって, X, Y が Z に沿って平行移動されている ($\nabla_Z X = \nabla_Z Y = 0$) ならば,

$$\partial_Z \langle g | X, Y \rangle = 0.$$

$\langle g | \bullet, \bullet \rangle$ はある意味ベクトルの内積を表すので,

2つのベクトルのなす「角度」は平行移動により不変である.

Contents

- ① はじめに
- ② スカラー・ベクトル
- ③ テンソル
- ④ 添字の上下
- ⑤ ベクトル場の共変微分
- ⑥ テンソル場の共変微分
- ⑦ まとめ
- ⑧ 補遺

まとめ

- Riemann 空間におけるスカラー場・ベクトル場・テンソル場.
 - 座標変換における変換則.
 - 計量テンソル g による添字の上下（反変 $\leftrightarrow$ 共変）
- 共変微分
座標変換に際してベクトル場・テンソル場の変換則に従うような微分.

(1, 1) 型テンソル場 T の共変微分の導出

$$\nabla_\gamma T_\beta^\alpha = \partial_\gamma T_\beta^\alpha + B_{\gamma\delta}^\alpha T_\beta^\delta + C_{\gamma\beta}^\delta T_\delta^\alpha$$

とおき、 $\nabla_\gamma T_\beta^\alpha$ が (1, 2) 型テンソル場の成分の変換規則を満たすように B, C を求める。

まず、座標変換 $(q^1, \dots, q^N) \rightarrow (Q^1, \dots, Q^N)$ に際し $\nabla_\gamma T_\beta^\alpha$ が (1, 2) 型テンソルの成分の変換規則を満たすことから、

$$\tilde{\nabla}_\gamma \tilde{T}_\beta^\alpha = \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma} \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} \nabla_\mu T_\lambda^\kappa = \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma} \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} \left(\frac{\partial T_\lambda^\kappa}{\partial q^\mu} + B_{\mu\rho}^\kappa T_\lambda^\rho + C_{\mu\lambda}^\rho T_\rho^\kappa \right).$$

一方、

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\gamma \tilde{T}_\beta^\alpha &= \frac{\partial \tilde{T}_\beta^\alpha}{\partial Q^\gamma} + \tilde{B}_{\gamma\delta}^\alpha \tilde{T}_\beta^\delta + \tilde{C}_{\gamma\beta}^\delta \tilde{T}_\delta^\alpha \\ &= \frac{\partial}{\partial Q^\gamma} \left(\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} T_\lambda^\kappa \right) + \tilde{B}_{\gamma\delta}^\alpha \frac{\partial Q^\delta}{\partial q^\mu} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} T_\lambda^\mu + \tilde{C}_{\gamma\beta}^\delta \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\delta} T_\mu^\kappa \\ &= \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma} \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} \frac{\partial T_\lambda^\kappa}{\partial q^\mu} + \left(\frac{\partial Q^\delta}{\partial q^\mu} \tilde{B}_{\gamma\delta}^\alpha + \frac{\partial q^\rho}{\partial Q^\gamma} \frac{\partial^2 Q^\alpha}{\partial q^\mu \partial q^\rho} \right) \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} T_\lambda^\mu \\ &\quad + \left(\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\delta} \tilde{C}_{\gamma\beta}^\delta + \frac{\partial^2 q^\mu}{\partial Q^\beta \partial Q^\gamma} \right) \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} T_\mu^\kappa. \end{aligned}$$

2 式を比較して、次が成り立てばよいことがわかる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma} \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} B_{\mu\rho}^\kappa &= \frac{\partial Q^\delta}{\partial q^\rho} \tilde{B}_{\gamma\delta}^\alpha + \frac{\partial q^\sigma}{\partial Q^\gamma} \frac{\partial^2 Q^\alpha}{\partial q^\mu \partial q^\rho}, \\ \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} C_{\mu\lambda}^\rho &= \frac{\partial q^\rho}{\partial Q^\delta} \tilde{C}_{\gamma\beta}^\delta + \frac{\partial^2 q^\rho}{\partial Q^\beta \partial Q^\gamma}.\end{aligned}$$

第 1 式より次を得る．これは Γ の変換規則と一致する．

$$B_{\zeta\rho}^\xi = \frac{\partial q^\xi}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial Q^\gamma}{\partial q^\zeta} \frac{\partial Q^\delta}{\partial q^\rho} \tilde{B}_{\gamma\rho}^\alpha + \frac{\partial q^\xi}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial^2 Q^\alpha}{\partial q^\rho \partial q^\zeta}.$$

第 2 式より次を得る．これは Γ の変換規則と一致する．

$$-\tilde{C}_{\gamma\beta}^\epsilon = -\frac{\partial Q^\epsilon}{\partial q^\rho} \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} C_{\mu\lambda}^\rho + \frac{\partial Q^\epsilon}{\partial q^\rho} \frac{\partial^2 q^\rho}{\partial Q^\gamma \partial Q^\beta}.$$

したがって、 $B_{\gamma\delta}^\alpha = \Gamma_{\gamma\delta}^\alpha$, $C_{\gamma\beta}^\delta = -\Gamma_{\gamma\beta}^\delta$ とおけば、所望の共変微分を得る．

□