リーマン幾何学 (3)
解析力学〜幾何学的視点から (10)

緒方秀教

電気通信大学　情報・ネットワーク工学専攻

April 11, 2022

はじめに

Riemann 幾何学

曲がった空間（Riemann 空間）の幾何学．

- 共変微分：空間の曲がり具合を考慮したベクトル・テンソルの微分．
- Christoffel の記号・曲率：空間の曲がり具合を表す量．

今回の内容

- Hodge 作用素．
  微分形式の「双対」 $\rightarrow$ 微分形式の内積．
- 余微分・Laplacian．
  外微分の随伴作用素．Hodge 作用素を用いて導入した内積に関し，

$$(\mathrm{d}\omega, \psi) = (\omega, \mathrm{d}^{\dagger}\psi).$$

Contents

詳細な証明などは「補遺」に記しました．
概要欄の URL にアクセスして，そこの PDF を御覧ください．

Contents

Hodge 作用素

3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$，直交座標（Cartesian 座標）(x, y, z)

$$\text{ベクトル場} \quad \boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad \boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z).$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned}
\omega_{\boldsymbol{A}} &= A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z, \\
\psi_{\boldsymbol{B}} &= B_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + B_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \\
\omega_{\boldsymbol{A}} \wedge \psi_{\boldsymbol{B}} &= (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&= (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z, \\
\int_{\mathbb{R}^3} \omega_{\boldsymbol{A}} \wedge \psi_{\boldsymbol{B}} &= \int_{\mathbb{R}^3} (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z. \qquad (1)
\end{aligned}$$

- $\psi_{\boldsymbol{B}}$ を $\omega_{\boldsymbol{B}} = B_x \mathrm{d}x + B_y \mathrm{d}y + B_z \mathrm{d}z$ に対応付けたくなる．→ Hodge 作用素．
- 微分形式の内積を (1) のような積分で定義する．
- これらを一般次元の空間，一般の座標で定義する．

Hodge 作用素（3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$，直交座標）

Hodge 作用素 $*$（3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$，直交座標）

$$*\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z, \quad *\mathrm{d}y = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x, \quad *\mathrm{d}z = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$
$$*(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = \mathrm{d}x, \quad *(\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x) = \mathrm{d}y, \quad *(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) = \mathrm{d}z.$$

- 1 形式 $\to$ 2 形式

$$\begin{aligned} & \omega = \omega_x \mathrm{d}x + \omega_y \mathrm{d}y + \omega_z \mathrm{d}z, \\ \to \quad & *\omega = \omega_x \mathrm{d}y \wedge \omega_z + \omega_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \omega_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

- 2 形式 $\to$ 1 形式

$$\begin{aligned} & \psi = \psi_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \psi_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \psi_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \\ \to \quad & *\psi = \psi_x \mathrm{d}x + \psi_y \mathrm{d}y + \psi_z \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

任意の微分形式 ω に対して，$**\omega = \omega$.

Hodge 作用素（3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$，直交座標）

ベクトル場の内積．

$$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad \boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z).$$

$$\downarrow$$

$$\omega_{\boldsymbol{A}} = A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z, \quad \omega_{\boldsymbol{B}} = B_x \mathrm{d}x + B_y \mathrm{d}y + B_z \mathrm{d}z,$$

$$\begin{aligned} \omega_{\boldsymbol{A}} \wedge *\omega_{\boldsymbol{B}} &= \omega_{\boldsymbol{B}} \wedge *\omega_{\boldsymbol{A}} \\ &= (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ &= (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{\boldsymbol{A}} &= A_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + A_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + A_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \\ \psi_{\boldsymbol{B}} &= B_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + B_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \\ \psi_{\boldsymbol{A}} \wedge *\psi_{\boldsymbol{B}} &= \psi_{\boldsymbol{B}} \wedge *\psi_{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

1 形式の内積．

$$\omega = \omega_x \mathrm{d}x + \omega_y \mathrm{d}y + \omega_y \mathrm{d}z, \quad \eta = \eta_x \mathrm{d}x + \eta_y \mathrm{d}y + \eta \mathrm{d}z,$$

$$\to \quad (\omega, \eta) := \int_{\mathbb{R}^3} \omega \wedge *\eta = \int_{\mathbb{R}^3} (\omega_x \eta_x + \omega_y \eta_y + \omega_z \eta_z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = (\eta, \omega).$$

Hodge 作用素（3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$，一般座標）

以上の Hodge 作用素とそれによる演算を一般の座標，一般の Riemann 空間の場合に拡張する．

まず，3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$，一般の座標 (q^1, q^2, q^3) の場合．

一般の座標の場合，3 次元積分をするとき，微小体積要素 $\mathrm{d}V$ が $\mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}q^2 \wedge \mathrm{d}q^3$ $(\mathrm{d}q^1\mathrm{d}q^2\mathrm{d}q^3)$ で与えられない．

$$\mathrm{d}V = \begin{cases} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \text{（直交座標）} \\ r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi & \text{（球座標）}. \end{cases}$$

微小体積要素を（微分形式で）どのように定義すべきか？

Hodge 作用素（3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$，一般座標）

重積分の公式から，

$$\mathrm{d}V = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q^1,q^2,q^3)} \right| \mathrm{d}q^1 \mathrm{d}q^2 \mathrm{d}q^3.$$

Jacobian を Riemann 空間の計量テンソル $g_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\alpha} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\beta}$. で表す．

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial q^1} & \dfrac{\partial y}{\partial q^1} & \dfrac{\partial z}{\partial q^1} \\ \dfrac{\partial x}{\partial q^2} & \dfrac{\partial y}{\partial q^2} & \dfrac{\partial z}{\partial q^2} \\ \dfrac{\partial x}{\partial q^3} & \dfrac{\partial y}{\partial q^3} & \dfrac{\partial z}{\partial q^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial q^1} & \dfrac{\partial x}{\partial q^2} & \dfrac{\partial x}{\partial q^3} \\ \dfrac{\partial y}{\partial q^1} & \dfrac{\partial y}{\partial q^2} & \dfrac{\partial y}{\partial q^3} \\ \dfrac{\partial z}{\partial q^1} & \dfrac{\partial z}{\partial q^2} & \dfrac{\partial z}{\partial q^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$$

両辺の行列式をとって，

$$\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q^1,q^2,q^3)} \right|^2 = g := \det(g_{\mu\nu}),$$
$$\therefore \quad \mathrm{d}V = \sqrt{g}\, \mathrm{d}q^1 \mathrm{d}q^2 \mathrm{d}q^3.$$

不変体積要素（3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$）

$$\omega_{\mathrm{vol}} := \sqrt{g}\mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}q^2 \wedge \mathrm{d}q^3 \quad (\, g := \det(g_{\mu\nu})\,).$$

不変体積要素 ω_{vol} は座標変換 $(q^1, q^2, q^3) \to (Q^1, Q^2, Q^3)$ で不変である．

【証明】新座標 (Q^α) で表した不変体積要素を $\widetilde{\omega}_{\mathrm{vol}}$ と記す．

$$\widetilde{\omega}_{\mathrm{vol}} = \sqrt{\widetilde{g}}\,\mathrm{d}Q^1 \wedge \mathrm{d}Q^2 \wedge \mathrm{d}Q^3 \quad (\, \widetilde{g} := \det(\widetilde{g}_{\mu\nu})\,).$$

計量テンソルは 2 階共変テンソルであるから，

$$\widetilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial Q^\mu}\frac{\partial q^\beta}{\partial Q^\nu} g_{\mu\nu}, \quad \therefore \quad \widetilde{g} = g\left\{\frac{\partial(q^1, q^2, q^3)}{\partial(Q^1, Q^2, Q^3)}\right\}^2.$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega}_{\mathrm{vol}} &= \sqrt{g}\,\frac{\partial(q^1, q^2, q^3)}{\partial(Q^1, Q^2, Q^3)}\,\frac{\partial(Q^1, Q^2, Q^3)}{\partial(q^1, q^2, q^3)}\mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}q^2 \wedge \mathrm{d}q^3 \\ &= \sqrt{g}\,\mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}q^2 \wedge \mathrm{d}q^3 = \omega_{\mathrm{vol}}.\end{aligned}$$

Hodge 作用素（3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$，一般座標）

【例】球座標 (r, θ, φ)

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

$$g_{rr} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = 1,$$

$$g_{\theta\theta} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = r^2, \qquad g_{\mu\nu} = 0 \quad (\,\mu \neq \nu\,).$$

$$g_{\varphi\varphi} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = r^2\sin^2\theta,$$

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = r^4\sin^2\theta.$$

$$\omega_{\mathrm{vol}} = r^2\sin\theta \mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi.$$

微小体積要素の球座標表示　$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$

Hodge 作用素（3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$，一般座標）

Hodge 作用素（3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$）

- 1 形式

$$\begin{aligned} &\omega = \omega_1 \mathrm{d}q^1 + \omega_2 \mathrm{d}q^2 + \omega_3 \mathrm{d}q^3, \\ \to \quad &*\omega := \sqrt{g}(\omega^1 \mathrm{d}q^2 \wedge \mathrm{d}q^3 + \omega^2 \mathrm{d}q^3 \wedge \mathrm{d}q^1 + \omega^3 \mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}q^2). \end{aligned}$$

- 2 形式

$$\begin{aligned} &\eta = \eta_{23} \mathrm{d}q^2 \wedge \mathrm{d}q^3 + \eta_{31} \mathrm{d}q^3 \wedge \mathrm{d}q^1 + \eta_{12} \mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}q^2. \\ \to \quad &*\eta := \sqrt{g}(\eta^{23} \mathrm{d}q^1 + \eta^{31} \mathrm{d}q^2 + \eta^{12} \mathrm{d}q^3). \end{aligned}$$

$$(\ g := \det(g_{\mu\nu})\ ).$$

計量テンソルの逆行列 $(g^{\mu\nu})$ により上付き添字にしていることに注意．

$$\omega^\mu := g^{\mu\nu}\omega_\nu, \quad \eta^{\mu\nu} := g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\eta_{\rho\sigma}.$$

Hodge 作用素（3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$，一般座標）

微分形式の内積（3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$）

$p(=1,2)$ 形式 ω, η に対し

$$(\omega, \eta) := \int_{\mathbb{R}^3} \omega \wedge *\eta = (\eta, \omega).$$

- 1 形式の内積

$$\omega = \omega_1 \mathrm{d}q^1 + \omega_2 \mathrm{d}q^2 + \omega_3 \mathrm{d}q^3, \quad \eta = \eta_1 \mathrm{d}q^1 + \eta_2 \mathrm{d}q^2 + \eta_3 \mathrm{d}q^3,$$

$$\to \quad (\omega, \eta) = (\eta, \omega) = \int_{\mathbb{R}^3} (\omega_1 \eta^1 + \omega_2 \eta^2 + \omega_3 \eta^3) \sqrt{g} \mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}q^2 \wedge \mathrm{d}q^3.$$

- 2 形式の内積

$$\omega = \omega_{23} \mathrm{d}q^2 \wedge \mathrm{d}q^3 + \omega_{31} \mathrm{d}q^3 \wedge \mathrm{d}q^1 + \omega_{12} \mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}q^2,$$

$$\eta = \eta_{12} \mathrm{d}q^2 \wedge \mathrm{d}q^3 + \eta_{23} \mathrm{d}q^3 \wedge \mathrm{d}q^1 + \eta_{31} \mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}q^2,$$

$$\to \quad (\omega, \eta) = (\eta, \omega) = \int_{\mathbb{R}^3} (\omega_{23} \eta^{23} + \omega_{31} \eta^{31} + \omega_{12} \eta^{12}) \sqrt{g} \mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}q^2 \wedge \mathrm{d}q^3.$$

上付き添字にしていることで被積分関数がスカラーになっていることに注意．

Hodge 作用素（3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$，一般座標）

微分形式 ω に対し $**\omega = \omega$.

【1 形式の場合の証明】$\omega = \omega_\mu \mathrm{d}q^\mu$ に対し

$$*\omega = \eta_{23}\mathrm{d}q^2 \wedge \mathrm{d}q^3 + \eta_{31}\mathrm{d}q^3 \wedge \mathrm{d}q^1 + \eta_{12}\mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}q^2,$$

$$\eta_{23} = \sqrt{g}\omega^1 = \sqrt{g}g^{1\lambda}\omega_\lambda, \quad \eta_{31} = \sqrt{g}\omega^2 = \sqrt{g}g^{2\lambda}\omega_\lambda, \quad \eta_{12} = \sqrt{g}\omega^3 = \sqrt{g}g^{3\lambda}\omega_\lambda 2,$$

$$**\omega = \sqrt{g}(\eta^{23}\mathrm{d}q^1 + \eta^{31}\mathrm{d}q^2 + \eta^{12}\mathrm{d}q^3).$$

微分形式の係数は添字について反対称であるから，$\eta_{32} = -\eta_{23}$ などとなることに注意すると，

$$\begin{aligned}
\eta^{23} &= g^{2\mu}g^{3\nu}\eta_{\mu\nu} \\
&= \begin{vmatrix} g^{22} & g^{23} \\ g^{32} & g^{33} \end{vmatrix}\eta_{23} - \begin{vmatrix} g^{21} & g^{23} \\ g^{31} & g^{33} \end{vmatrix}\eta_{31} + \begin{vmatrix} g^{21} & g^{22} \\ g^{31} & g^{32} \end{vmatrix}\eta_{12} \\
&\quad \text{（線形代数における逆行列の公式を思い出すと）} \\
&= g^{-1}(g_{11}\eta_{23} + g_{21}\eta_{31} + g_{31}\eta_{12}) \\
&= g^{-1/2}(g_{11}g^{1\lambda}\omega_\lambda + g_{12}g^{2\lambda}\omega_\lambda + g_{13}g^{3\lambda}\omega_\lambda) \\
&= g^{-1/2}g_{1\mu}g^{\mu\lambda}\omega_\lambda = g^{-1/2}\delta_1^\lambda\omega_\lambda = g^{-1/2}\omega_1.
\end{aligned}$$

同様に $\eta^{31} = g^{-1/2}\omega_2, \eta^{12} = g^{-1/2}\omega_3$ も得るから，$**\omega = \omega$. □

Hodge 作用素（一般の Riemann 空間 M）

不変体積要素（一般の Riemann 空間 M）

$$\omega_{\mathrm{vol}} := \sqrt{|g|}\mathrm{d}q^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^N \quad (\, g := \det(g_{\mu\nu})\,).$$

不変体積要素は座標変換 $(x^\mu) \to (x'^\mu)$ で不変である．

Hodge 作用素 $*$（一般の N 次元 Riemann 空間 M）

p 形式 $\omega = \dfrac{1}{p!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}\mathrm{d}q^{\mu_1} \wedge \cdots \mathrm{d}q^{\mu_p}$ に対し，

$$*\omega := \frac{1}{p!(N-p)!}E^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\mu_{p+1}\cdots\mu_N}\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}\mathrm{d}q^{\mu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\mu_N}.$$

$$E_{\mu_1\cdots\mu_N} := \begin{cases} +\sqrt{|g|} & (12\cdots N) \to (\mu_1 \cdots \mu_N) \text{ は偶置換}, \\ -\sqrt{|g|} & (12\cdots N) \to (\mu_1 \cdots \mu_N) \text{ は奇置換}, \\ 0 & \text{その他}, \end{cases}$$

$$E^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\mu_{p+1}\cdots\mu_N} := g^{\mu_1\nu_1}\cdots g^{\mu_p\nu_p}E_{\nu_1\cdots\nu_p\mu_{p+1}\cdots\mu_N}.$$

$E_{\mu_1\cdots\mu_N}$ は N 階完全反対称共変テンソルである．

Hodge 作用素（一般の Riemann 空間 M）

不変体積要素（一般の Riemann 空間 M）

$$\omega_{\mathrm{vol}} := \sqrt{|g|}\mathrm{d}q^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^N \quad (\, g := \det(g_{\mu\nu})\,).$$

不変体積要素は座標変換 $(x^\mu) \to (x'^\mu)$ で不変である．

Hodge 作用素 $*$（一般の N 次元 Riemann 空間 M）

p 形式 $\omega = \dfrac{1}{p!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}\mathrm{d}q^{\mu_1} \wedge \cdots \mathrm{d}q^{\mu_p}$ に対し，

$$*\omega := \frac{1}{p!(N-p)!}E^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\mu_{p+1}\cdots\mu_N}\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}\mathrm{d}q^{\mu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\mu_N}.$$

$$E_{\mu_1\cdots\mu_N} := \begin{cases} +\sqrt{|g|} & (12\cdots N) \to (\mu_1\cdots\mu_N) \text{ は偶置換}, \\ -\sqrt{|g|} & (12\cdots N) \to (\mu_1\cdots\mu_N) \text{ は奇置換}, \\ 0 & \text{その他}, \end{cases}$$

$$E^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\mu_{p+1}\cdots\mu_N} := g^{\mu_1\nu_1}\cdots g^{\mu_p\nu_p}E_{\nu_1\cdots\nu_p\mu_{p+1}\cdots\mu_N}.$$

$*$ 一般相対性理論では擬 Riemann 空間 $(g<0)$ を考えるから，$g \to |g|$ とした．

Hodge 作用素（一般の Riemann 空間）

p 形式 ω に対し　$**\omega = (-1)^{p(N-p)}(\operatorname{sgn} g)\omega.$

微分形式の内積

p 形式

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_p}, \quad \psi = \frac{1}{p!}\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_p}$$

に対し

$$\omega\wedge *\psi = \frac{1}{p!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}\psi^{\mu_1\cdots\mu_p}\omega_{\mathrm{vol}} = \psi\wedge *\omega.$$

微分形式の内積（一般の Riemann 空間 M）

p 形式 ω, ψ に対し，

$$(\omega,\psi) := \int_M \omega\wedge *\psi = (\psi,\omega).$$

余微分・Laplacian

余微分作用素 $\mathrm{d}^\dagger$：外微分 d の内積 $(\cdot,\cdot)$ に関する随伴作用素．

$$(\omega, \mathrm{d}^\dagger \eta) = (\mathrm{d}\omega, \eta).$$

余微分作用素 $\mathrm{d}^\dagger$

p 形式 $\omega = \dfrac{1}{p!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}\mathrm{d}q^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\mu_p}$ に対し

$$\mathrm{d}^\dagger \omega := (-1)^{Np+N+1}(\operatorname{sgn} g) * \mathrm{d} * \omega.$$

地道な計算により次の等式が示される（「補遺」参照）．

$$\mathrm{d}^\dagger \omega = -\frac{1}{(p-1)!}\nabla_\lambda \omega^\lambda{}_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}}\mathrm{d}q^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\mu_{p-1}}.$$

余微分・Laplacian

定理：$\mathrm{d}^\dagger$ は d の随伴作用素

M がコンパクトで境界のない Riemann 空間ならば，
$p-1$ 形式 ω, p 形式 η に対し

$$(\mathrm{d}\omega, \eta) = (\omega, \mathrm{d}^\dagger \eta).$$

【証明】

$$\begin{aligned}
(\omega, \mathrm{d}^\dagger\eta) &= \int_M \omega \wedge *\mathrm{d}^\dagger \eta \\
&= (-1)^{Np+N+1} \int_M \omega \wedge * * \mathrm{d} * \eta \\
&\quad (\mathrm{d} * \eta \text{ は } p-1 \text{ 形式であることに注意して}) \\
&= (-1)^{Np+N+1} (-1)^{(p-1)(N-p+1)} \int_M \omega \wedge \mathrm{d} * \eta \\
&= (-1)^p \int_M \omega \wedge *\eta.
\end{aligned}$$

くさび積の外微分の公式より

$$\mathrm{d}(\omega \wedge *\eta) = \mathrm{d}\omega \wedge *\eta + (-1)^{p-1}\omega \wedge \mathrm{d} * \eta,$$
$$\int_M \mathrm{d}(\omega \wedge *\eta) = \int_M \mathrm{d}\omega \wedge *\eta - (-1)^p \int_M \omega \wedge \mathrm{d} * \eta.$$

M は境界をもたないこと ($\partial M = \emptyset$) と Stokes の定理より，

$$\int_M \mathrm{d}(\omega \wedge *\eta) = \int_{\partial M} \omega \wedge *\eta = 0,$$
$$\therefore \quad (\mathrm{d}\omega, \eta) = \int_M \mathrm{d}\omega \wedge *\eta = (-1)^p \int_M \omega \wedge \mathrm{d} * \eta = (\omega, \mathrm{d}^\dagger \eta).$$

$\square$

余微分・Laplacian

Laplacian $\triangle$

$$\triangle := \mathrm{d}\mathrm{d}^\dagger + \mathrm{d}^\dagger\mathrm{d}.$$

関数（0 形式）f に対する Laplacian の作用を調べる．

$\mathrm{d}^\dagger f = 0$ より $\triangle f = \mathrm{d}^\dagger\mathrm{d}f$．

$$\mathrm{d}f = \partial_\mu f\,\mathrm{d}q^\mu.$$

先程示した余微分の表式より，

$$\mathrm{d}^\dagger\mathrm{d}f = -\nabla_\lambda(\partial^\lambda f) = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\lambda\left(\sqrt{|g|}g^{\lambda\mu}\partial_\mu f\right).$$

(2 番めの等号は「補遺」を参照)

関数 f に対する Laplacian$\triangle$ の作用

$$\triangle f = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\lambda\left(\sqrt{|g|}g^{\lambda\mu}\partial_\mu f\right).$$

余微分・Laplacian

- N 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$，直交座標（Cartesian 座標）$(x^1, \ldots, x^N)$ の場合，

$$\triangle f = -\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial (x^k)^2}.$$

通常の Laplacian の符号を反転させたもの．

- 3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$，球座標 (r, θ, φ) の場合．

$$g = r^4 \sin^2\theta, \quad g^{rr} = 1, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta},$$

その他の $g^{\mu\nu} = 0$．これらを用いて，

$$\triangle f = -\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right].$$

Contents

まとめ

- Hodge 作用素．
  - p 形式 $\omega \to N-p$ 形式 $*\omega$.
  - 微分形式の「双対」．$**\omega \propto \omega$.
  - 微分形式の内積．

$$(\omega, \psi) := \int_M \omega \wedge *\psi = (\psi, \omega).$$

- 余微分 $\mathrm{d}^\dagger$．外微分の随伴作用素．

$$(\mathrm{d}\omega, \psi) = (\omega, \mathrm{d}^\dagger \psi).$$

- Laplacian $\triangle := \mathrm{d}^\dagger \mathrm{d} + \mathrm{d}\mathrm{d}^\dagger$.