特殊相対性理論
解析力学～幾何学的視点から～(11)

緒方秀教

電気通信大学

April 15, 2022

はじめに

（特殊）相対性理論と言えば⋯

- $E = mc^2$.
- 運動している物体は縮む，運動していると時間の経過が遅くなる．
- ⋯

（特殊）相対性理論の本質は

- すべての座標系（慣性系）は同等である．
  幾何学性：変換に対する不変性．
- 光の速度はすべての慣性系で同じである．

Contents

1 はじめに

2 特殊相対論の基本原理

3 特殊相対論による不思議な現象

4 Lorentz 変換，ベクトル・テンソル

5 電磁気学

6 まとめ

特殊相対論の基本原理

光の速さ $c = 299\,792\,458\mathrm{m/sec}$.
これは，どこから見たときの速さなのだろう？
（どの座標系から観測したときの速さだろう？）

- （古代）宇宙はエーテルという絶対静止している媒質で満たされている．
上の光速度はこのエーテルを基準にして観測したときの値である．
- Michelson-Morley の実験（1887 年）．
異なる速度で運動する座標系から観測すれば，観測される光速度は異なるはず．
【結果】どの座標系から観測しても光速度は同じ（エーテルの存在の否定）．

世の中に絶対的基準となる座標系は存在しない．

特殊相対論の基本原理

特殊相対性原理（Einstein の相対性原理）

すべての物理法則はいかなる慣性系を基準にとっても全く同じ形式で表現される．

慣性系

「慣性の法則」が成立する座標系，すなわち，外力が作用していないとき，すべての物体は静止，または一定の速度で運動を続ける．

光速度不変の原理

真空中の光の速さは光源の運動状態に無関係である．

- 特殊相対性理論：上の 2 つの原理に基づいて構築された力学の体系．
- 古典力学（Newton 力学）：物理系の速度 $v \ll c$ の極限．

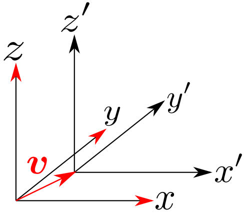
特殊相対論の基本原理

$4 = 1 + 3$ 次元時空間（Minkowski 空間）．

$$(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3).$$

- 時空点あるいは世界点：Minkowski 空間内の 1 点．
  物理現象が起こった時刻，場所は時空点（世界点）で表される．
- 世界線：Minkowski 空間内の曲線．
  物理系の運動軌道は世界線で表される．

特殊相対論の基本原理



- 2 つの慣性系 $\mathrm{S}(t,x,y,z)$, $\mathrm{S}'(t',x',y',z')$.
- S' は S に対して一定速度 $\boldsymbol{v}$ で動く．

空間内に光が放たれたとする．
光の進み方を 2 座標系 S, S' で観測する．

- 座標系 S では時間 Δt に $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ だけ進む．

$$\Delta s^2 := -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = 0.$$

- 座標系 S' では時間 $\Delta t'$ に $(\Delta x', \Delta y', \Delta z')$ だけ進む．

$$\Delta s'^2 := -(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 = 0.$$

両座標系 S, S' で光速度は同じことに注意．

$$\Delta s^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta s'^2 = 0.$$

特殊相対論の基本原理

実はもっと強い次の関係式が成り立つ．

任意の 2 慣性系 S, S' の座標に対し次の関係式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\Delta s^2 :=& -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \\
=& -(c\Delta t')^2 + \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 =: \Delta s'^2.
\end{aligned}
$$

すなわち，

$$
\begin{aligned}
\Delta s^2 :=& -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 \\
=& -(\Delta x'^0)^2 + (\Delta x'^1)^2 + (\Delta x'^2)^2 + (\Delta x'^3)^2 =: \Delta s'^2.
\end{aligned}
$$

【理由】特殊相対性の原理より，

- 物体が座標系 S から見て等速直線運動している（世界線が (x^0, x^1, x^2, x^3) の一次関数で表される）ならば，
- 物体は座標系 S' から見ても等速直線運動している（世界線が (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) の一次関数で表される）．

座標変換 $(x^0, x^1, x^2, x^3) \to (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ は 1 次関数で表される．

よって，$\Delta s'^2$ は Δx^μ の 2 次同次式で表される．

$$\Delta s'^2 = M_{00}(\Delta x^0)^2 + 2\sum_{i=1}^{3} M_{0i}\Delta x^0 \Delta x^i + \sum_{i,j=1}^{3} M_{ij}\Delta x^i \Delta x^j \quad (\,M_{\mu\nu}\ :\ \text{const.}\,).$$

$\Delta x^0 = \|\Delta \boldsymbol{x}\| := \sqrt{(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2}$ であるとする．
このとき $\Delta s^2 = 0$，したがって，$\Delta s'^2 = 0$ となるので，

$$M_{00}\|\Delta \boldsymbol{x}\|^2 + 2\sum_{i=1}^{3} M_{0i}\Delta x^i \|\Delta x\| + \sum_{i,j=1}^{3} M_{ij}\Delta x^i \Delta x^j = 0. \tag{1}$$

$\Delta x^i \to -\Delta x^i$ $(i = 1, 2, 3)$ とおいて，

$$M_{00}\|\Delta \boldsymbol{x}\|^2 - 2\sum_{i=1}^{3} M_{0i}\Delta x^i \|\Delta x\| + \sum_{i,j=1}^{3} M_{ij}\Delta x^i \Delta x^j = 0. \tag{2}$$

(1), (2) より

$$\sum_{i=1}^{3} M_{0i}\Delta x^i \|\Delta \boldsymbol{x}\| = 0.$$

これが任意の $\Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3$ について成り立つから，$M_{0i} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

特殊相対論の基本原理

$$M_{00}\|\Delta\boldsymbol{x}\|^2+\sum_{i,j=1}^{3}M_{ij}\Delta x^i\Delta x^j=0. \tag{3}$$

とくに $\Delta x^2=\Delta x^3=0$ とおくと $M_{11}=-M_{00}$ を得る．
同様にして $M_{22}=M_{33}=-M_{00}$ を得るから，(3) より次の式を得る．

$$\sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{3}M_{ij}\Delta x^i\Delta x^j=0.$$

これが任意の $\Delta x^1,\Delta x^2,\Delta x^3$ について成り立つので $M_{ij}=0\ (i\neq j)$．

$$\Delta s'^2=M_{00}\left[(\Delta x^0)^2-\sum_{i=1}^{3}(\Delta x^i)^2\right]=c(\|\boldsymbol{v}\|)\Delta s^2,$$

$c(\|\boldsymbol{v}\|)$ は $\boldsymbol{v}$ による定数で，時空の等方性より $\boldsymbol{v}$ の方向にはよらない．
上の議論で座標系 S と S' の役割を入れ替えることにより，
$\Delta s^2=c(\|-\boldsymbol{v}\|)\Delta s'^2=c(\|\boldsymbol{v}\|)\Delta s'^2$ を得るので，$\Delta s^2=c(\|\boldsymbol{v}\|)^2\Delta s^2$，$c(\|\boldsymbol{v}\|)=\pm1$.
$\beta=v/c\to 0$ とすると $\Delta s'^2=\Delta s^2$ となるから，$c(\|\boldsymbol{v}\|)=1$. □

特殊相対論の基本原理

任意の 2 慣性系 $\mathrm{S}(x^0, x^1, x^2, x^3), \mathrm{S}'(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ に対し，

$$\begin{aligned}
{\Delta s'}^2 &:= -(\Delta x'^0)^2 + (\Delta x'^1)^2 + (\Delta x'^2)^2 + (\Delta x'^3)^2 \\
&= -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 =: \Delta s^2.
\end{aligned}$$

特殊相対論の基本原理

任意の 2 慣性系 $\mathrm{S}(x^0, x^1, x^2, x^3), \mathrm{S}'(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ に対し，

$$\begin{aligned}\Delta s'^2 &:= -(\Delta x'^0)^2 + (\Delta x'^1)^2 + (\Delta x'^2)^2 + (\Delta x'^3)^2 \\ &= -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 =: \Delta s^2.\end{aligned}$$

物体は光速度より速く運動することはできない．

【理由】

- 物体が慣性系 S に対し速度 $v = \beta c$ で運動する．
- 慣性系 S' を物体と一緒に運動するようにとる．

物体の座標に着目すると，物体は慣性系 S' に対しては静止しているので
$\Delta x'^i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) となり，

$$-(\Delta x'^0)^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)2 = -(\Delta x^0)^2(1 - \beta^2).$$

仮に $v > c$ ($\beta > 1$) とすると，最左辺 < 0, 最右辺 > 0 となり矛盾． $\square$

特殊相対論の基本原理

とくに座標系 S' が座標系 S に対し x^1-方向に一定速度 v で運動する場合について，座標変換 $(x^0, x^1, x^2, x^3) \to (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ を具体的に求める．

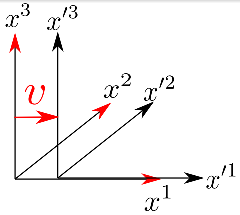
（両座標系の原点は一致させておく）

(x'^μ) は (x^μ) の線形変換，そして，

$$x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3$$

である． $x^1 = \beta x^0 = vt$ ($\beta = v/c$) のとき $x'^1 = 0$ であるから，

$$x'^1 = \text{const.} \times (x^1 - \beta x^0).$$



$s'^2 = s^2$ より線形変換 $(x^\mu) \to (x'^\mu)$ の係数を求めて，次を得る（「補遺」参照）．

$$\begin{cases} x'^0 = \dfrac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ x'^1 = \dfrac{x^1 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ x'^2 = x^2, \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \qquad \left(\beta = \frac{v}{c} \right).$$

1 はじめに

2 特殊相対論の基本原理

3 特殊相対論による不思議な現象

4 Lorentz 変換，ベクトル・テンソル

5 電磁気学

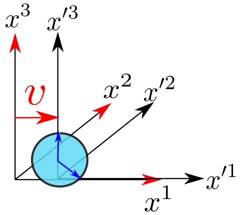
6 まとめ

特殊相対論による不思議な現象

運動すると時間の経過が遅くなる．

- 時計が慣性系 S に対し x^1 方向に速度 $v = \beta c$ で運動する．
- 慣性系 S$'$：時計と一緒に運動する．

$$\Delta x'^0 = \frac{\Delta x^0 - \beta \Delta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \Delta x'^1 = \frac{\Delta x^1 - \beta \Delta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$



時計の座標に着目する．
時計は S$'$ から見ると静止しているので，$\Delta x'^1 = 0$,

$$\Delta x'^1 = \frac{\Delta x^1 - \beta \Delta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0, \quad \Delta x^0 = \beta \Delta x^1,$$

$$\Delta x'^0 = \frac{\Delta x^0 - \beta(\beta \Delta x^0)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{1-\beta^2}\Delta x^0 < \Delta x^0.$$

動いてる時計が示す時間の進み　$\Delta t' = \sqrt{1-\beta^2}\Delta t < \Delta t.$

特殊相対論の基本原理

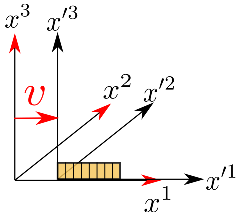
Lorentz 収縮

運動すると物体の長さが縮む．

- モノサシが慣性系 S に対し x^1 方向に速度 v で運動している．
  モノサシは x^1 軸と平行．
- 慣性系 S$'$：モノサシと一緒に運動する．

モノサシの両端の座標の差に着目する．

$$\Delta x'^0 = \frac{\Delta x^0 - \beta \Delta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \Delta x'^1 = \frac{\Delta x^1 - \beta \Delta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$



時刻 $t(= x^0/c)$ （慣性系 S）でのモノサシの長さを測る．

$$\text{S で長さ } \Delta l, \quad \text{S}' \text{ で長さ } \Delta l'$$

上の式で $\Delta x^0 = 0$, $\Delta x^1 = \Delta l$, $\Delta x'^1 = \Delta l'$ とおいて，

$$\Delta l = \sqrt{1-\beta^2}\Delta l' < \Delta l'.$$

動いているモノサシを静止している座標系から見ると縮んでいる．

Contents

1 はじめに

2 特殊相対論の基本原理

3 特殊相対論による不思議な現象

4 Lorentz 変換，ベクトル・テンソル

5 電磁気学

6 まとめ

Lorentz 変換，ベクトル・テンソル

Minkowski 空間

次の計量 $\eta_{\mu\nu}$ をもつ 4=1+3 次元時空間．

$$(\eta_{\mu\nu}) = (\eta^{\mu\nu}) := \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

* $\eta_{\mu\nu}$ は「計量」といっても正定値ではない．

2 慣性系 $\mathrm{S}(x^0, x^1, x^2, x^3)$，$\mathrm{S}'(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$．

$$x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu \quad (\ \mu = 0, 1, 2, 3;\ \ a^\mu_\nu, b^\mu\ \ :\ \text{const.}\ ). \tag{4}$$

$$\Delta s^2 := -(\Delta x^0)^2 + \sum_{i=1}^{3} (\Delta x^i)^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu.$$

$\Delta s'^2 = \Delta s^2$ より，

$$\eta_{\mu\nu} a^\mu{}_\rho a^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}. \tag{5}$$

（非斉次）Lorentz 変換（Poincaré 変換）：(5) を満たす座標変換 (4)．

Lorentz 変換，ベクトル・テンソル

Lorentz 変換

- 任意の 2 慣性系 $\mathrm{S}(x^0, x^1, x^2, x^3)$, $\mathrm{S}'(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ の座標は（非斉次）Lorentz 変換により移り合う．

$$x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu \quad (\, \mu = 0, 1, 2, 3 \,),$$

$$\eta_{\mu\nu} a^\mu{}_\rho a^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}, \quad \eta_{\mu\nu} := \begin{cases} -1 & (\, \mu = \nu = 0 \,) \\ 1 & (\, \mu = \nu = 1, 2, 3 \,) \\ 0 & (\, \mu \neq \nu \,). \end{cases}$$

- Lorentz 群：斉次 Lorentz 変換全体からなる群．

  $*$ 斉次 Lorentz 変換：$x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$ $(\, b^\mu = 0 \,)$.

Lorentz 変換，ベクトル・テンソル

座標変換（非斉次 Lorentz 変換）

$$x'^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + b^{\mu}, \quad \eta_{\mu\nu} a^{\mu}{}_{\rho} a^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}.$$

- スカラー：座標変換で不変な量．
  （例）$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^{\mu} \Delta x^{\nu}$ はスカラーである．
- 反変ベクトル：座標変換で次のように変換する 4 個の数の組 A^{μ}.

$$A^{\mu} \to A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu} = a^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}.$$

  （例）座標の差 Δx^{μ} は反変ベクトルである．
- 共変ベクトル：座標変換で次のように変換する 4 個の数の組 B_{μ}.

$$B_{\mu} \to B'_{\mu} = B_{\nu} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = B_{\nu} (a^{-1})^{\nu}{}_{\mu}$$

$$\left(((a^{-1})^{\mu}{}_{\nu}) : (a^{\mu}{}_{\nu}) \text{ の逆行列}, \quad (a^{-1})^{\mu}{}_{\rho} a^{\rho}{}_{\nu} = a^{\mu}{}_{\rho} (a^{-1})^{\rho}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \right).$$

  （例）スカラー S の微分 $\partial_{\mu} S$ は共変ベクトルである．
- 反変ベクトル A^{μ}，共変ベクトル B_{μ} に対し，$B_{\mu} A^{\mu}$ はスカラーになる．

Lorentz 変換，ベクトル・テンソル

座標変換（非斉次 Lorentz 変換）

$$x'^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + b^{\mu}, \quad \eta_{\mu\nu} a^{\mu}{}_{\rho} a^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}.$$

- (p,q)-型テンソル：座標変換で次のように変換する数の組 $T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$.

$$\begin{aligned} T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} &\to T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}. \end{aligned}$$

Lorentz 変換，ベクトル・テンソル

$\eta_{\mu\nu}, \eta^{\mu\nu}$ による添字の上げ下げ．

$$A_\mu := \eta_{\mu\nu} A^\nu, \quad B^\mu := \eta^{\mu\nu} B_\nu,$$
$$T^\lambda{}_{\mu\nu} := \eta_{\mu\rho} T^{\lambda\rho}{}_\nu, \quad S^{\lambda\mu}{}_\nu := \eta^{\mu\rho} S^\lambda{}_{\rho\nu}, \quad \text{etc.}$$

すなわち，

$$(A^\mu) = (A_t, A_x, A_y, A_z) \quad \to \quad (A_\mu) = (-A_t, A_x, A_y, A_z),$$
$$(B_\mu) = (B_t, B_x, B_y, B_z) \quad \to \quad (B^\mu) = (-B_t, B_x, B_y, B_z).$$

添字の上げ下げで第 0 成分（時間成分）だけ符号が変わる．

- 反変ベクトル A^μ に対し $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$ は共変ベクトルになる．
- 共変ベクトル B_μ に対し $B^\mu = \eta^{\mu\nu} B_\nu$ は反変ベクトルになる．
- $(2,1)$-型テンソル $T^{\lambda\mu}{}_\nu$ に対し $T^\lambda{}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} T^{\lambda\rho}{}_\nu$ は $(1,2)$-型テンソルになる．
- etc.

Lorentz 変換，ベクトル・テンソル

反変ベクトル A^μ に対し $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$ は共変ベクトルになる．

【証明】Lorentz 変換に対し A_μ は次のように変換する．

$$A_\mu \to A'_\mu = \eta_{\mu\nu} A'^\nu = \eta_{\mu\nu} a^\nu{}_\rho A^\rho.$$

$$\eta_{\mu\nu} a^\mu{}_\rho a^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \quad \text{より} \quad \eta_{\mu\nu} a^\nu{}_\rho = (a^{-1})^\nu{}_\mu \eta_{\nu\rho}$$

であるから，

$$A'_\mu = (a^{-1})^\nu{}_\mu \eta_{\nu\rho} A^\rho = (a^{-1})^\nu{}_\mu A_\nu.$$

ゆえに，A_μ は共変ベクトルの変換則に従う． $\square$

Contents

1 はじめに

2 特殊相対論の基本原理

3 特殊相対論による不思議な現象

4 Lorentz 変換，ベクトル・テンソル

5 電磁気学

6 まとめ

電磁気学

Maxwell 方程式（真空中）

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0},$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t},$$

$$\boldsymbol{E} \text{ 電場}, \quad \boldsymbol{H} \text{ 磁場},$$
$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} \text{ 電束密度}, \quad \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \text{ 磁束密度}$$
$$\left(\epsilon_0 \text{ 真空中の誘電率}, \quad \mu_0 \text{ 真空中の透磁率}, \quad \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \right),$$
$$\rho \text{ 電荷密度}, \quad \boldsymbol{j} \text{ 電流密度}.$$

特殊相対論では，4(=1+3) 元ベクトルを用いて Maxwell 方程式を簡潔に記述することができる．

電磁気学

Maxwell 方程式（真空中）

$$(1)\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho, \quad (2)\quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0},$$
$$(3)\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0, \quad (4)\quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$
$$(\ \boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}\ ).$$

スカラーポテンシャル ϕ，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}.$$

Maxwell 方程式のうち (2), (3) は自動的に満たされる．

ゲージ変換．

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\,\lambda, \quad \phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}.$$

得られる電磁場 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ は変わらない．

電磁気学

4 元ポテンシャル A^μ, 4 元電流密度 j^μ.

$$A^\mu := \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right), \quad A_\mu = \left(-\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right),$$
$$j^\mu := (c\rho, j_x, j_y, j_z), \quad j_\mu = (-c\rho, j_x, j_y, j_z).$$

電荷保存則 $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0$ は次のように表される.

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

ゲージ変換.

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \operatorname{grad} \lambda, \quad \phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}.$$

4 元ポテンシャル A^μ を用いると次のように表される.

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda.$$

$*$ $A_0 = -\phi/c$ に注意.

4 元電磁場（反対称 2 階共変テンソル）.

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

電磁場 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ の成分.

$$\frac{1}{c} E_k = F_{k0} \quad (\, k = 1, 2, 3 = x, y, z \,),$$

$$B_x = F_{23}, \quad B_y = F_{31}, \quad B_z = F_{12}.$$

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Maxwell 方程式は次の 2 式に統合される

$$(1)\quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu, \quad (2)\quad \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0.$$

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t},$$

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}.$$

(1) について確認．$\nu = 0$ の場合，

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \sum_{k=1}^{3} \partial_k F^{k0} = -\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{3} \partial_k E_k = -\frac{1}{c}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = -c\epsilon_0\mu_0\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E},$$

$$\therefore \quad \epsilon_0\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho.$$

$\nu = 1 = x$ の場合，

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 1} &= \partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = c^{-2}\partial_t E_x - \partial_y B_z + \partial_z B_y \\ &= \epsilon_0\mu_0\partial_t E_x - \mu_0(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H})_x \end{aligned}$$

により $\dfrac{\partial D_x}{\partial t} - (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H})_x = -j_x$ を得る．$\nu = 2, 3 = y, z$ の場合も同様． □

Maxwell 方程式の微分形式による表現

$$A := A_\mu \mathrm{d}x^\mu, \quad F := \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = \mathrm{d}A, \quad j := j_\mu \mathrm{d}x^\mu$$

とおくと，

$$\mathrm{d}^\dagger F = \mu_0 j, \quad \mathrm{d}F (= \mathrm{d}\mathrm{d}A) = 0.$$

【注意】Minkowski 空間における微分形式に対する Hodge 作用素．
（$*$ 前回（第 10 回）の動画参照）

$$\omega = \omega_\mu \mathrm{d}x^\mu, \quad \eta = \eta_\mu \mathrm{d}x^\mu,$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} *\omega &= \omega^0 \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 - \omega^1 \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \\ &\quad - \omega^2 \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 - \omega^3 \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2, \\ \omega \wedge *\eta &= (\omega_0 \eta^0 + \omega_1 \eta^1 + \omega_2 \eta^2 + \omega_3 \eta^3) \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3. \end{aligned}$$

電磁気学

【注意】Minkowski 空間における微分形式に対する Hodge 作用素（続）.

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu, \quad \eta = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu,$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} *\omega = {}& \omega^{01}\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + \omega^{02}\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + \omega^{03}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \\ & + \omega^{12}\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^3 + \omega^{23}\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 + \omega^{31}\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^2, \end{aligned}$$

$$\omega \wedge *\eta = \left(\sum_{i=1}^{3}\omega_{0i}\eta^{0i} + \omega_{12}\eta^{12} + \omega_{23}\eta^{23} + \omega_{31}\eta^{31}\right)\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3.$$

不変体積要素 $\quad \omega_{\mathrm{vol}} = \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3.$

余微分作用素 $\mathrm{d}^\dagger$.

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \ \rightarrow \ \mathrm{d}^\dagger\omega = -\partial_\lambda \omega^\lambda{}_\mu \mathrm{d}x^\mu.$$

Contents

1. はじめに
2. 特殊相対論の基本原理
3. 特殊相対論による不思議な現象
4. Lorentz 変換，ベクトル・テンソル
5. 電磁気学
6. まとめ

まとめ

- 特殊相対性理論
  - 宇宙に絶対静止している座標系は存在しない．
  - 特殊相対性原理：すべての慣性系は同等である．
  - 光速度不変の原理．
- 特殊相対論による不思議な現象（Lorentz 収縮，etc.）
- （数学）Minkowski 空間，反変／共変ベクトル，テンソル．
- 特殊相対論における電磁気学の記述．

  4 元ベクトル，微分形式による表現．