座標変換 $(x^0, x^1, x^2, x^3) \to (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ の計算

$x'^1 \propto x^1 - \beta x^0$ に注意して、次のようにおく。

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma(a x^0 + b x^1), \\ x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0), \\ x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3. \end{cases}$$

$s'^2 = s^2$, すなわち、$-(x'^0)^2 + (x'^1)^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2$ に代入して、

$$-\gamma^2(a x^0 + b x^1)^2 + \gamma^2(x^1 - \beta x^0)^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2,$$

$$\begin{cases} \gamma^2(a^2 - \beta^2) = 1 & \text{——①} \\ \gamma^2(1 - b^2) = 1 & \text{——②} \\ ab + \beta = 0 & \text{——③} \end{cases}$$

①, ② より

$$a^2 + b^2 = 1 + \beta^2. \quad \text{——④}$$

③, ④ より

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (1-\beta)^2, \quad a + b = \pm(1-\beta),$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = (1+\beta)^2, \quad a - b = \pm(1+\beta)$$

(複号同順とは限らない)。

$a + b = 1 - \beta$, $a - b = 1 + \beta$ の場合、$a = 1$, $b = -\beta$.

① または ② より $\gamma = \pm(1-\beta^2)^{-1/2}$.

$a + b = -(1-\beta)$, $a - b = -(1+\beta)$ の場合、$a = -1$, $b = \beta$.

① または ② より $\gamma = \pm(1-\beta^2)^{-1/2}$.

$a + b = 1 - \beta$, $a - b = -(1+\beta)$ の場合、$a = -\beta$, $b = 1$.

ただし、これを ① または ② に代入すると、$\gamma \times 0 = 1$ となってしまい、これを満たす γ は存在しない。よって、この場合の解 a, b, γ はない。

同様にして、$a + b = -(1-\beta)$, $a - b = 1 + \beta$ の場合の解 a, b, γ はない。

以上より次を得る。

$$x'^0 = \pm\frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x'^1 = \pm\frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{(複号同順とは限らない)}.$$

これらのうち、非相対論的極限 $\beta \to 0$ ($v \ll c$) で $x'^0 = x^0$ ($t' = t$), $x'^1 = x^1 - \beta x^0 = x - vt$ となるものをとって、

$$x'^0 = \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x'^1 = \frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$