特殊相対性理論 (2)
解析力学～幾何学的視点から～(12)

緒方秀教

電気通信大学　情報・ネットワーク工学専攻

April 20, 2022

はじめに

（前回の復習）特殊相対性理論

- すべての慣性系は同等である．
- 光速度 c はすべての慣性系で同じである．

物体の速度 $v \approx c$ では Newton 力学，常識と異なる現象が…

今回の目的

特殊相対性理論における力学を構築する．

- どういう原理に基づいて力学を構築するか?
- Newton 力学をどのように拡張するか?

Contents

Contents

特殊相対論的力学

【復習】特殊相対性理論の 2 大原理

- すべての慣性系は同等である．
- 光速度はすべての慣性系で同じである．

主要な結果

- Minkowski 空間：4=1+3 次元時空間．$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$.
- $\mathrm{d}s^2 := -(\mathrm{d}x^0)^2 + (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2$：すべての慣性系で同じである．
- Lorentz 変換：2 つの慣性系の間の座標変換．

$$x'^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + b^{\mu},$$

$$\eta_{\mu\nu} a^{\mu}{}_{\rho} a^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma},$$

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} := \begin{cases} -1 & (\mu = \nu = 0) \\ 1 & (\mu = \nu = 1, 2, 3) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \quad \text{(Minkowski 空間の「計量」).}$$

- 反変・共変ベクトル，テンソル．

特殊相対論的力学

これから，特殊相対論における力学を構築する．

どういう方針で力学を構築するか？

特殊相対論の力学の原理

- 力学の方程式は Lorentz 変換において「身分」の明らかな量で記述される．

  （要するに，ベクトル・テンソルで方程式を記述する）

  相対性理論：座標変換に対する物理量の振る舞いに関する理論．

- 非相対論的極限（物体の速度 $v \ll c$, i.e., $\beta := v/c \to 0$）では Newton 力学に一致する．

特殊相対論的力学

固有時 τ

次の式により「固有時」τ を導入する．

$$c^2 \mathrm{d}\tau^2 = -\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2.$$

- $\mathrm{d}s^2$ はすべての慣性系で共通の量である（スカラーである）．
- しかし，物体の速度は光速度 c を越えないので $\mathrm{d}s^2 < 0$.
  $\to$ $\mathrm{d}s$ は虚数となり，気持ち悪い．
- そこで実数のスカラーである固有時 τ を導入する．
  - すべての慣性系で共通な「時間」の役割．
  - 非相対論的極限 $\beta = v/c \to 0$ では，従来の時間 t に一致する．

特殊相対論的力学

4 元速度

$$(u^0, u^1, u^2, u^3) := \left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau}\right).$$

- 反変ベクトルである, i.e., 座標変換（Lorentz 変換）

  $$x^\mu \to x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu$$

  に対し次のように変換する．

  $$u^\mu \to u'^\mu = a^\mu{}_\nu u^\nu.$$

- 非相対論的極限 $\beta = v/c \to 0$ で

  $$(u^0, u^1, u^2, u^3) \to (c, \boldsymbol{v}), \quad \boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}.$$

- 固有時 τ の定義より，

  $$u_\mu u^\mu = -(u^0)^2 + (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 = -c^2.$$

特殊相対論的力学

4 元運動量

$$(p^0, p^1, p^2, p^3) := (mu^0, mu^1, mu^2, mu^3).$$

- 反変ベクトルである．

特殊相対論における運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = m\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = F^\mu \quad (\,\mu = 0, 1, 2, 3\,).$$

- 従来の Newton 運動方程式の拡張．
- 反変ベクトルの間の関係式．
- (F^μ)：4 元力．これは反変ベクトル．
  4 成分は独立ではない．$u_\mu u^\mu = -c^2$ を微分して，

$$u_\mu F^\mu = 0.$$

特殊相対論的力学

4 元運動量の第 0 成分 p^0 は何か？

【復習】Hamilton 形式の解析力学．

- 物理量 A を生成子とする正準変換 $(z^\alpha) \to (z^\alpha(\lambda))$ ($(z^\mu) = (q^\alpha, p_\alpha)$)

$$\frac{\mathrm{d}z^\mu}{\mathrm{d}\lambda} = \{z^\mu, A\} \quad (\{\cdot,\cdot\}\text{：Poisson 括弧}).$$

- 運動量 (p_1, p_2, p_3)：空間の平行移動の生成子．
- エネルギー (Hamiltonian)：時間発展の生成子（正準方程式）．

p^0 はエネルギーとみなすのが妥当である．

物理次元を揃えるため c を掛けて，

4 元運動量=(エネルギー，運動量)

$$E = cp^0 \quad \text{（エネルギー）}.$$

特殊相対論的力学

$u_\mu u^\mu = -c^2$，すなわち，$p_\mu p^\mu = -m^2c^2$ より

$$E = cp^0 = \sqrt{m^2c^4 + c^2\boldsymbol{p}^2}, \quad \boldsymbol{p} := \left(m\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}, m\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau}, m\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau} \right).$$

とくに静止している物体に対して

$$E = mc^2 \quad \text{静止エネルギー}.$$

自由粒子に対して，

$$E = cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{|\boldsymbol{v}|}{c}, \quad \boldsymbol{v} = \left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}t} \right).$$

非相対論的極限 $\beta \to 0$ では，

$$E = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \simeq mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) = mc^2 + \frac{m}{2}v^2.$$

自由粒子の運動エネルギー $\dfrac{1}{2}mv^2$ が現れる．

特殊相対論的力学

4 元力 (F^μ) の第 0 成分 F^0 の意味．

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = F^\mu, \quad u_\mu \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0,$$

$$u^0 \frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}\tau} = \sum_{k=1}^{3} u^k \frac{\mathrm{d}p^k}{\mathrm{d}\tau} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau} F^k.$$

$u^0 = c\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$ より，

$$F^0 = \frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{3} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} F^k.$$

F^0 は 外力 F^k が単位時間にする仕事 $\div\, c$ である．

4 元運動方程式の意味

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\text{エネルギー}) = (\text{外力が単位時間にする仕事}),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\text{運動量}) = (\text{外力}).$$

Contents

特殊相対論の解析力学

4 元ポテンシャル A^μ，4 元電流 j^μ.

$$(A^\mu) = \left(\frac{\phi}{c}, \boldsymbol{A}\right), \quad (j^\mu) = (c\rho, \boldsymbol{j}).$$

ϕ スカラーポテンシャル, $\boldsymbol{A}$ ベクトルポテンシャル,

ρ 電荷密度, $\boldsymbol{j}$ 電流密度.

電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$

$$(F_{\mu\nu}) = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Maxwell 方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu, \quad \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0.$$

Maxwell 方程式は次の作用（Lagrangian 密度）から得られる．

電磁場の作用（Lagrangian 密度）

$$S_{\mathrm{e.m.}} = \int \mathrm{d}^4x \mathscr{L}_{e.m}, \quad \mathscr{L}_{\mathrm{e.m.}} = -\frac{1}{4\mu_0 c} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{c} j^\mu A_\mu .$$

無限遠（領域の境界）で場はゼロとして A_μ についての変分 $\delta S_{\mathrm{e.m.}} = 0$ とする．

$$\delta S_{\mathrm{e.m.}} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\delta S_{\mathrm{e.m.}} &= -\frac{1}{2\mu_0 c}\int \mathrm{d}^4x (\delta F_{\mu\nu})F^{\mu\nu} + \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x j^\mu \delta A_\mu \\
&= -\frac{1}{2\mu_0 c}\int \mathrm{d}^4x [\partial_\mu(\delta A_\nu) - \partial_\nu(\delta A_\mu)]F^{\mu\nu} + \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x j^\mu \delta A_\mu
\end{aligned}$$

（第 1 項を部分積分，無限遠で場はゼロになるから）

$$= \frac{1}{\mu_0 c}\int \mathrm{d}^4x \delta A_\nu (\partial_\mu F^{\mu\nu} + \mu_0 j^\nu) = 0,$$

よって，$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu$ を得る．

$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$ は $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ から直接得られる． □

特殊相対論の解析力学

自由粒子に対する作用 (Lagrangian)

次の方針で求めてみる．

1. Lagrangian は座標とその 1 階導関数の関数であり，スカラー（Lorentz 変換で不変）である．
2. 作用積分は積分変数の選び方によらない．
3. 非相対論的極限 $\beta = v/c \to 0$ で非相対論的作用 (Lagrangian) に一致する．

1. 「座標とその 1 階導関数の関数」というのは，非相対論的力学では，運動方程式は座標についての 2 階微分方程式であり，Lagrange 運動方程式が

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) = 0 \quad (\ L \text{ Lagrangian}\ )$$

であることによる．

これだけの方針のもとであとは手探りで求める．

特殊相対論の解析力学

作用積分の積分変数を σ とする（時間と同じ物理次元）

1. L は $x^\mu, \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\sigma$ の関数でスカラーである（Lorentz 変換で不変）．

$$\rightarrow \quad L = L\left(-\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\sigma}\right).$$

2. 作用積分は積分変数の取り方によらない．
   積分変数を $\sigma \to \lambda$ とすると，

$$S = \int_{\lambda_\mathrm{A}}^{\lambda_\mathrm{B}} L\left(-\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2\right)\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda = \int_{\lambda_\mathrm{A}}^{\lambda_\mathrm{B}} L\left(-\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\right)\mathrm{d}\lambda,$$

$$\therefore \quad L = \text{const.} \times \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\sigma}}.$$

非相対論的極限で Newton 運動方程式を得なければならないから，
あまり複雑な関数形にできない．

特殊相対論の解析力学

3. 物理次元を非相対論の場合の作用に一致するため，適当な定数を掛ける．

自由粒子の作用 (Lagrangian)

$$S_{\text{particle}} = -mc \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu} = -mc \int_{\sigma_{\mathrm{A}}}^{\sigma_{\mathrm{B}}} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\sigma}} \mathrm{d}\sigma.$$

非相対論的極限では，

$$\begin{aligned} S_{\text{particle}} &= -mc^2 \int_{\sigma_{\mathrm{A}}}^{\sigma_{\mathrm{B}}} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2} \mathrm{d}\sigma \\ &\simeq -mc^2 \int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}} \left[1 - \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] \mathrm{d}t \\ &= \int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}} \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}^2 \mathrm{d}t - mc^2 (t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}}). \end{aligned}$$

非相対論における自由粒子の作用を得る．

特殊相対論の解析力学

端点固定して ($\delta x^\mu(\sigma_\mathrm{A}) = \delta x^\mu(\sigma_\mathrm{B}) = 0$) 変分 $\delta S_\mathrm{particle} = 0$ とする．

$$\begin{aligned}\delta S_\mathrm{particle} &= -mc\int_{\sigma_\mathrm{A}}^{\sigma_\mathrm{B}} \delta\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\sigma}}\mathrm{d}\sigma \\ &= mc\int_{\sigma_\mathrm{A}}^{\sigma_\mathrm{B}} \frac{\eta_{\mu\nu}\dfrac{\mathrm{d}(\delta x^\mu)}{\mathrm{d}\sigma}\dfrac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\sigma}}{\sqrt{\cdots}}\mathrm{d}\sigma \\ &= -mc\int_{\sigma_\mathrm{A}}^{\sigma_\mathrm{B}} \delta x^\mu \eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{\mathrm{d}x^\nu/\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{\cdots}}\right)\mathrm{d}\sigma = 0.\end{aligned}$$

積分変数としてとくに固有時 τ をとれば $\sqrt{\cdots} = c$ となるので，

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\nu}{\mathrm{d}\tau^2} = 0.$$

自由粒子に対する相対論的運動方程式を得る．

特殊相対論の解析力学

電磁場と相互作用する粒子（電荷 q）

電磁場の作用．

$$S_{\mathrm{e.m.}} = \underbrace{-\frac{1}{4\mu_0 c}\int \mathrm{d}^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x j^\mu A_\mu}_{(2)}.$$

1. 電磁場 $F_{\mu\nu}$ のみを含むので考慮しない．
2. 粒子と電磁場との相互作用を表す．

$$\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} j^\mu = (cq, q\boldsymbol{v}) \quad \text{より} \quad \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x j^\mu A_\mu = \int_{\sigma_{\mathrm{A}}}^{\sigma_{\mathrm{B}}} \mathrm{d}\sigma q\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma}A_\mu(x).$$

電磁場と相互作用する粒子の作用 (Lagrangian)

$$S = -mc\int_{\sigma_{\mathrm{A}}}^{\sigma_{\mathrm{B}}} \mathrm{d}\sigma\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\sigma}} + \int_{\sigma_{\mathrm{A}}}^{\sigma_{\mathrm{B}}} \mathrm{d}\sigma q\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma}A_\mu(x).$$

特殊相対論の解析力学

x^μ についての変分 $\delta S = 0$ ($\delta x^\mu(\sigma_\mathrm{A}) = \delta x(\sigma_\mathrm{B}) = 0$) とすれば，

$$\begin{aligned}\delta S = & -mc\int_{\sigma_\mathrm{A}}^{\sigma_\mathrm{B}} \mathrm{d}\sigma \delta x^\mu \eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{\mathrm{d}x^\nu/\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{\cdots}}\right) \\ & + q\int_{\sigma_\mathrm{A}}^{\sigma_\mathrm{B}} \mathrm{d}\sigma\left[\frac{\mathrm{d}(\delta x^\mu)}{\mathrm{d}\sigma}A_\mu(x) + \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma}\delta x^\nu \partial_\nu A_\mu(x)\right] \\ = & \int_{\sigma_\mathrm{A}}^{\sigma_\mathrm{B}} \mathrm{d}\sigma \delta x^\mu\left[-mc\,\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{\mathrm{d}x^\nu/\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{\cdots}}\right) + q\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\sigma}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\right] = 0.\end{aligned}$$

$\sigma = \tau$ とおいて，

電磁場と相互作用する粒子の特殊相対論的運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = q\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}F_{\mu\nu} \quad (\,\mu = 0, 1, 2, 3\,).$$

$\mu = 1, 2, 3$ の場合，

$$m\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\tau^2} = q\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{E} + q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\tau}\times\boldsymbol{B}.$$

非相対論的極限 $\quad m\dfrac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = q\boldsymbol{E} + q\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B}.$

Contents

まとめ

特殊相対性理論の力学

- 4 元速度，4 元運動量，4 元力．

$$4\text{ 元運動量}\quad (p^\mu) = (\text{エネルギー}, \text{運動量}).$$

- 静止している物体に対して，$E = mc^2$（静止エネルギー）．
- 特殊相対論的運動方程式．
- 特殊相対論における解析力学．

新しい理論（特殊相対性理論）をどうやって構築したか？

- 座標変換に対する物理量の振る舞い．
- 理論が要求する対称性・不変性．
- 非相対論的極限では Newton 力学に帰着．