一般相対性理論
解析力学～幾何学的視点から～(13)

緒方秀教

電気通信大学　情報・ネットワーク工学専攻

April 24, 2022

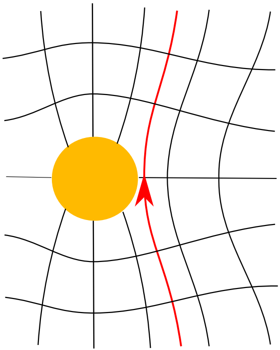
はじめに

特殊相対性理論 (Einstein, 1905)

- 「慣性系」という特別な座標系のみ対象としている．
- 重力を扱うことができない．

一般相対性理論 (Einstein, 1915)

- すべての座標系を対象としている．
- 重力＝時空間の曲がり．
  重力の力学の幾何学的記述
  （Riemann 幾何学）．



Contents

Contents

一般相対論の基本原理

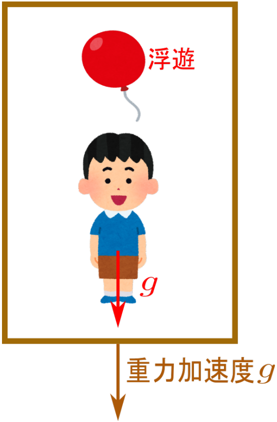
特殊相対論の問題点

- 「慣性系」という特別な座標系のみ対象としている．
- 重力を扱うことができない．
  特殊相対論では重力ポテンシャルの方程式を記述できない（かなり難しい）．

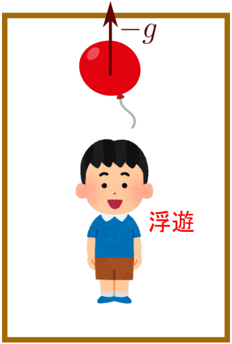
一般相対論の基本原理：一般相対性原理

慣性系：外力が働かない時，静止または等速運動するような座標系．
慣性系か否かは（外力が働いているか否かは）自明にはわからない．

Einstein の思考実験：重力落下するエレベータ．



外から見た場合



エレベータ内から見た場合

一般相対論の基本原理：一般相対性原理

一般相対性原理

すべての物理法則はいかなる座標系においても全く同じ形式で表される．

- （特殊相対論）慣性系 $\longrightarrow$ （一般相対論）任意の座標系．
- 物理量はスカラー，ベクトル，テンソルで表される．
  座標変換に対する諸量の振る舞いを明確にしなければならない．

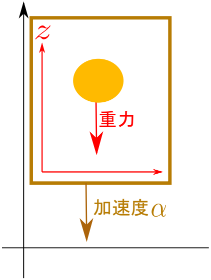
一般相対論の基本原理：等価原理

等価原理

重力内の時空間に任意の 1 点をとると，その周りの無限小の 4 次元領域に対し特別な座標系をとって，その無限小領域は無重力状態（平坦な Minkowski 空間）になるようにすることができる．

一般相対論の基本原理：等価原理

- 一様重力場．
- 鉛直下方に加速度 α で落下するエレベータ．
- エレベータに固定した座標系 S．



座標系 S における Newton 運動方程式

$$m_{\mathrm{I}}\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -m_{\mathrm{G}} g + m_{\mathrm{I}}\alpha,$$

m_{I} ： 慣性質量, m_{G} ： 重力質量.

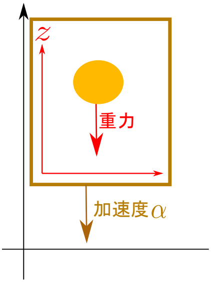
物体が静止して見えるとき，

$$\frac{\alpha}{g} = \frac{m_{\mathrm{G}}}{m_{\mathrm{I}}}. \tag{1}$$

適切に加速度 α を取れば，すべての物体に対し (1) が成り立つ（実験事実）．

一般相対論の基本原理：等価原理

- 一様重力場．
- 鉛直下方に加速度 α で落下するエレベータ．
- エレベータに固定した座標系 S．



座標系 S における Newton 運動方程式

$$m_{\mathrm{I}}\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -m_{\mathrm{G}}g + m_{\mathrm{I}}\alpha,$$

m_{I} ：慣性質量，　m_{G} ：重力質量．

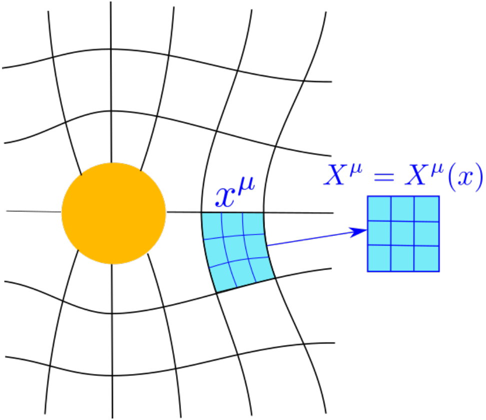
弱い等価原理 (Einstein)

慣性質量 ＝ 重力質量．

→ 一様な重力場は適当に座標系をとれば打ち消せる（幾何学の言葉）．

→ （等価原理）すべての重力場は局所的に打ち消せる．

一般相対論の基本原理：等価原理

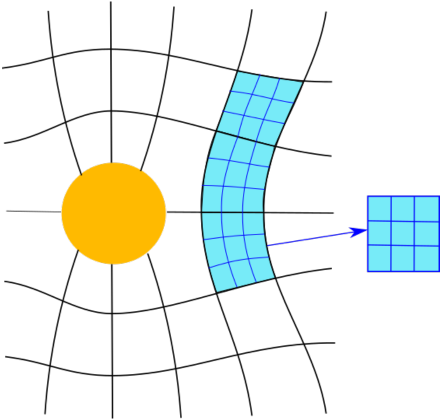


任意の点の微小近傍は，ある座標変換 $X^\mu = X^\mu(x)$ により平坦な Minkowski 空間（無重力場）に写せる．

X^μ：局所 Lorentz 座標．

一般相対論の基本原理：等価原理

【等価原理】小さな Minkoswki 空間（平坦な空間）をうぃーんと曲げて
ジグゾーパズルのようにはめ込み，全体の曲がった時空間を作り上げている．



Contents

運動方程式

変分原理（Hamilton の原理）.

【特殊相対性理論】

$$\delta S = -mc \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta(c\,\mathrm{d}\tau) = 0,$$

$$c\,\mathrm{d}\tau = \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}X^{\mu}\mathrm{d}X^{\nu}} \quad \left(\tau\ :\ \text{固有時}\right),$$

$$\eta_{\mu\nu} := \begin{cases} -1 & (\mu = \nu = 0) \\ 1 & (\mu = \nu = 1, 2, 3) \\ 0 & (\mu \neq \nu). \end{cases}$$

$$\downarrow$$

自由粒子の運動方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2 X^{\mu}}{\mathrm{d}\tau^2} = 0$

運動方程式

一般相対論でも

$$\delta S = -mc \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta(c\,\mathrm{d}\tau) = 0$$

としてみる．

【等価原理】

各点近傍は適当な座標変換 $x^\mu \to X^\mu$ により平坦な Minkowski 空間に写せる．

$$c\,\mathrm{d}\tau = \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}X^\mu \mathrm{d}X^\nu} = \sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu},$$

$$g_{\mu\nu}(x) := \eta_{\rho\sigma}\frac{\partial X^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\nu}.$$

$$\downarrow$$

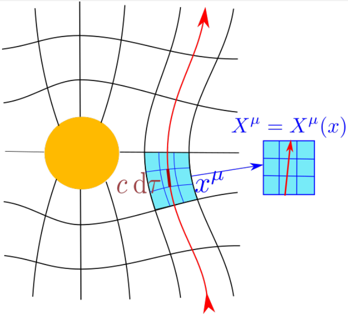
一般相対論における変分原理（Hamilton の原理）

運動方程式

一般相対論における Hamilton の原理

$$
\begin{aligned}
\delta S :=& -mc\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta(c\,\mathrm{d}\tau) \\
=& -mc\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta\left(\sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu}\right) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
g_{\mu\nu}(x) := \eta_{\rho\sigma}\frac{\partial X^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\nu}.
$$



運動方程式

積分変数を σ とおいて変分 $\delta S = 0$ （端点で $\delta x^\mu = 0$）を計算する．

$$\delta S = -mc\int_{\sigma_\mathrm{A}}^{\sigma_\mathrm{B}} \mathrm{d}\sigma\, \delta\sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\sigma}}$$

$$= \frac{mc}{2}\int_{\sigma_\mathrm{A}}^{\sigma_\mathrm{B}} \mathrm{d}\sigma \frac{\delta g_{\mu\nu}(x)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\sigma} + 2g_{\mu\nu}(x)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}(\delta x^\nu)}{\mathrm{d}\sigma}}{\sqrt{\cdots}}$$

（青字に部分積分を適用．端点で $\delta x = 0$ より）

$$= \frac{mc}{2}\int_{\sigma_\mathrm{A}}^{\sigma_\mathrm{B}} \mathrm{d}\sigma\,\delta x^\lambda \left[\frac{\partial_\lambda g_{\mu\nu}(x)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\sigma}}{\sqrt{\cdots}} - 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{g_{\lambda\mu}(x)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma}}{\sqrt{\cdots}}\right)\right] = 0.$$

積分変数 σ としてとくに固有時 τ ($c\,\mathrm{d}\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu}$) をとれば，
$\sqrt{\cdots} = c$ であるから，

$$\delta S = \frac{m}{2}\int_{\tau_\mathrm{A}}^{\tau_\mathrm{B}} \mathrm{d}\tau\,\delta x^\lambda \left[\partial_\lambda g_{\mu\nu}(x) - 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(g_{\lambda\mu}(x)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)\right]$$

$$= m\int_{\tau_\mathrm{A}}^{\tau_\mathrm{B}} \mathrm{d}\tau\,\delta x^\lambda \left\{\frac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}(x)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}(x)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} - g_{\lambda\mu}(x)\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}\right\}$$

$$= 0.$$

運動方程式

運動方程式=測地線方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\kappa}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} = 0,$$

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(x)\left[\partial_\mu g_{\lambda\nu}(x) + \partial_\nu g_{\lambda\mu}(x) - \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x)\right]$$

$$\left((g^{\kappa\lambda}(x)) \;:\; (g_{\mu\nu}(x)) \text{ の逆行列} \right).$$

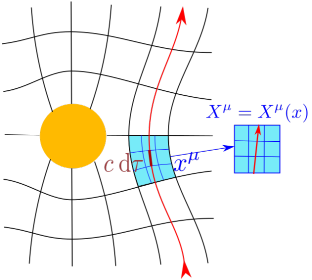
- いま考えている 4 次元時空間での「長さ」

$$c\,\mathrm{d}\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu}.$$

- 測地線：2 点間を結ぶ曲線で「長さ」が停留となるもの．

  物体の軌道：時空間の測地線．

- $g_{\mu\nu}, \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \to$ 重力．



Contents

Riemann 空間，スカラー，ベクトル，テンソル

一般相対論の舞台となる時空間．

- 4=1+3 次元時空間 $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$ $\ldots$ （擬）Riemann 空間
  計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$. ただし，正定値ではない．
- 一般相対論は，すべての座標系は同等であることを要請する理論だから，
  座標変換における諸量の振る舞いは明確にしなければならない．

$$\downarrow$$

物理量はこの Riemann 空間におけるスカラー，ベクトル，テンソルで
表される．

一般相対論の時空間におけるスカラー，ベクトル，テンソルとそれらの代数について，これから考える．

Riemann 空間，スカラー，ベクトル，テンソル

座標変換 $(x^0, x^1, x^2, x^3) \to (y^0, y^1, y^2, y^3)$.

- スカラー：座標変換で変わらない数.
- 反変ベクトル：次のように変換する 4 つの数の組 (A^μ).

$$A^\mu \to A'^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu.$$

- 共変ベクトル：次のように変換する 4 つの数の組 (B_μ).

$$B_\mu \to B'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} B_\nu.$$

- (p, q)-型テンソル：次のように変換する数の組 $(T^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \ldots \nu_q})$.

$$T^{\mu_1 \ldots \mu_p}{}_{\nu_1 \ldots \nu_q} \to \\ T'^{\,\mu_1 \ldots \mu_p}{}_{\nu_1 \ldots \nu_q} = \frac{\partial y^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial y^{\mu_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial y^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial y^{\nu_q}} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q}.$$

Riemann 空間，スカラー，ベクトル，テンソル

なぜこのようなベクトル，テンソルの変換則を要求するのか？

- 反変ベクトルの正体は方向微分作用素．

【例】4 元速度 $u^\mu = \dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$ は反変ベクトルである．
物体の軌道 $x^\mu(\tau)$ に沿ってのスカラー量 $f(x)$ の変化の割合．

$$\frac{\mathrm{d}f(x(\tau))}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial f(x)}{\partial x_\mu} = u^\mu \partial_\mu f(x).$$

反変ベクトル (A^μ) $\quad\longleftrightarrow\quad$ 方向微分作用素 $A = A^\mu \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$.

微分作用素そのものは座標変換で不変である．

$$A = A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = A'^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu}, \qquad \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu},$$

$$\therefore \quad A'^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu.$$

Riemann 空間，スカラー，ベクトル，テンソル

なぜこのようなベクトル，テンソルの変換則を要求するのか？

- 共変ベクトルの正体は 1 形式（1 微分形式）
  （反変ベクトルをスカラーに写す線形写像）.

【例】スカラー値関数 $f(x)$ の勾配 $\partial_\mu f$ は共変ベクトルである．
反変ベクトル $A = A^\mu \partial_\mu$ に対し，

$$(\partial_\mu f)A^\mu = \langle \partial_\mu f \mathrm{d}x^\mu | A^\mu \partial_\mu \rangle = \langle \mathrm{d}f | A \rangle (= Af\ ).$$

最右辺は微分作用素 A の関数 f への作用．

共変ベクトル (ω_μ) $\quad\longleftrightarrow\quad$ 1 形式 $\omega = \omega_\mu \mathrm{d}x^\mu$

1 形式そのものは座標変換で不変である．

$$\omega = \omega_\mu \mathrm{d}x^\mu = \omega'_\mu \mathrm{d}y^\mu, \quad \mathrm{d}x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\mathrm{d}y^\nu,$$

$$\therefore \quad \omega'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu}\omega_\nu.$$

Riemann 空間，スカラー，ベクトル，テンソル

- テンソル $T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ の正体．

$$T = T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{\mu_p}}\otimes \mathrm{d}x^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{\nu_q}.$$

p 個の共変ベクトル（1 形式）$\omega^{(1)},\ldots,\omega^{(p)}$，$q$ 個の反変ベクトル $A_{(1)},\ldots,A_{(q)}$ をスカラーに写す多重線形写像．

$$T(\omega^{(1)},\ldots,\omega^{(p)},A_{(1)},\ldots,A_{(q)}) := T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}\omega^{(1)}_{\mu_1}\cdots\omega^{(p)}_{\mu_p}A^{\nu_1}_{(1)}\cdots A^{\nu_q}_{(q)}.$$

多重線形写像 T は座標変換で不変であることから，テンソル成分に対する変換則を得る．

Riemann 空間，スカラー，ベクトル，テンソル

計量テンソルによる添字の上下．

- 反変ベクトル A^μ $\to$ 共変ベクトル $A_\mu := g_{\mu\nu}A^\nu$.
- 共変ベクトル ω_μ $\to$ 反変ベクトル $\omega^\mu := g^{\mu\nu}\omega_\mu$.
- $(2,1)$-型テンソル $T^{\mu\nu}{}_\rho$ $\to$ $(1,2)$-型テンソル $T^\mu{}_{\nu\rho} := g_{\nu\kappa}T^{\mu\kappa}{}_\rho$.
- etc.

【$A_\mu := g_{\mu\nu}A^\nu$ が共変ベクトルの変換則に従うこと】

$g_{\mu\nu}$ が 2 階共変テンソルであることを用いて，

$$\begin{aligned}
A_\mu \to A'_\mu &= g'_{\mu\nu}A'^\nu \\
&= \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu}g_{\alpha\beta}\right)\left(\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\gamma}A^\gamma\right) \\
&= \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\underbrace{\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\gamma}}_{\delta^\beta_\gamma}g_{\alpha\beta}A^\gamma \\
&= \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}g_{\alpha\gamma}A^\gamma = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}A_\alpha.
\end{aligned}$$

□

Riemann 空間，スカラー，ベクトル，テンソル

添字の上下で何を行っているのか？

- 反変ベクトル A^μ $\to$ 共変ベクトル $A_\mu := g_{\mu\nu}A^\nu$.
  反変ベクトル A に次の線形写像（1 形式）ω_A を対応させること．

$$\langle \omega_A | X \rangle := g(A, X) \quad (\ X\ :\ 反変ベクトル\ ).$$

- 共変ベクトル ω_μ $\to$ 反変ベクトル $\omega^\mu := g^{\mu\nu}\omega_\mu$.
  線形写像（1 形式）ω に次を満たす反変ベクトル A_ω を対応させること．

$$g(A_\omega, X) = \langle \omega | X \rangle \quad (\ \forall\ 反変ベクトル\ X\ ).$$

Riemann 空間，スカラー，ベクトル，テンソル

Einstein の規約による縮約．

- 反変ベクトル A^μ，共変ベクトル B_μ $\to$ スカラー $A^\mu B_\mu$．
- 2 階反変テンソル $T^{\lambda\mu}$，共変ベクトル A_μ $\to$ 反変ベクトル $T^{\lambda\mu} A_\mu$．
- etc.

【$A^\mu B_\mu$ がスカラーであること】

$$\begin{aligned} A'^\mu B'_\mu &= \frac{\partial y^\mu}{\partial x_\nu} A^\nu \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\mu} B_\rho \\ &= \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\mu} A^\nu B_\rho \\ &= \delta^\rho_\nu A^\nu B_\rho = A^\nu B_\nu . \end{aligned}$$

□

Riemann 空間，スカラー，ベクトル，テンソル

一般相対論における座標変換は局所的に Lorentz 変換になっている．

- 特殊相対論：Lorentz 変換 $X^\mu \to Y^\mu$.

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial Y^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial Y^\alpha} = \eta_{\alpha\beta}.$$

- 一般相対論：座標変換 $x^\mu \to y^\mu$.

$$g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} = \tilde{g}_{\alpha\beta}(y).$$

各時空点で座標系 x^μ, y^μ それぞれを局所 Lorentz 座標に変換．

$$x^\mu \to X^\mu = X^\mu(x), \quad y^\mu \to Y^\mu = Y^\mu(y),$$
$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}, \quad \tilde{g}_{\mu\nu}(y) = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial Y^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial Y^\beta}{\partial y^\nu}.$$

この時，各時空点で次の式が成り立つ．

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial Y^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial Y^\beta} = \eta_{\alpha\beta}.$$

局所 Lorentz 座標系 X^μ, Y^μ は Lorentz 変換で結ばれている．

$$\eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial Y^\alpha}\frac{\partial X^\nu}{\partial Y^\beta}=\eta_{\alpha\beta}.$$

【証明】

$$\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial Y^\alpha}\frac{\partial X^\nu}{\partial Y^\beta}
&=\eta_{\mu\nu}\underbrace{\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\kappa}}_{(1)}\frac{\partial x^\kappa}{\partial y^\rho}\frac{\partial y^\rho}{\partial Y^\alpha}\underbrace{\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\lambda}}_{(1)}\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\sigma}\frac{\partial y^\sigma}{\partial Y^\beta}\\
&=\eta_{\mu\nu}\underbrace{\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\kappa}\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\lambda}}_{(1)}\frac{\partial x^\kappa}{\partial y^\rho}\frac{\partial y^\rho}{\partial Y^\alpha}\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\sigma}\frac{\partial y^\sigma}{\partial Y^\beta}\\
&=\underbrace{g_{\kappa\lambda}(x)\frac{\partial x^\kappa}{\partial y^\rho}}_{(2)}\frac{\partial y^\rho}{\partial Y^\alpha}\underbrace{\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\sigma}}_{(2)}\frac{\partial y^\sigma}{\partial Y^\beta}\\
&=\underbrace{\widetilde{g}_{\rho\sigma}(y)}_{(2)}\frac{\partial y^\rho}{\partial Y^\alpha}\frac{\partial y^\sigma}{\partial Y^\beta}=\eta_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

□

Contents

まとめ

- 特殊相対論 → 一般相対論．
  - 慣性系 → 任意の座標系．
  - 重力を扱う．
- 一般相対性原理：すべての座標系は同等．
  すべての物理量はスカラー，ベクトル，テンソルで表される．
- 等価原理．
  局所的に平坦な Minkowski 空間に変換できる．→ 時空間の曲がり（重力）．
- 運動方程式（測地線方程式）．
- （擬）Riemann 空間におけるスカラー，ベクトル，テンソルとそれらの代数．

相対性理論

- 物理の話 → 巧みに数学の言葉に言い換えている．
- 相対論は古典物理学に対して「革命」をやっているわけではない．
  古典論で守るべきもの・変えるべきものを慎重に選んで，
  物理的原理をより深いところに置いている．