一般相対性理論（２）
解析力学〜幾何学的視点から〜（１４）

緒方秀教

電気通信大学　情報・ネットワーク工学専攻

April 30, 2022

はじめに

- （前回）重力場（計量テンソル $g_{\mu\nu}$）が与えられたとして，粒子の運動方程式を求めた（測地線方程式）．
- （今回）重力場が従うべき方程式を求める（Einstein 方程式）．
  - 作用を適切に設定して，変分原理（Hamilton の原理）を適用して求める．
- Schwarzschild 計量．
  - 球対称な重力場．
  - 一番簡単な宇宙のモデル．
  - ブラックホール．

Contents

1. はじめに
2. 重力場の方程式
3. Schwarzschild 計量
4. まとめ

重力場の方程式

- 物質（粒子& 電磁場）が与えられたとき，どのようにして重力場が決まるか，それを与える方程式を求める．
- 重力場＝計量テンソル $g_{\mu\nu}$ に対し適切な作用 S を求めて，変分原理（Hamilton の原理）$\delta S = 0$ により $g_{\mu\nu}$ が従う方程式を求める．

作用を求める方針

理論に要求される変換性・対称性を頼りにして，無理のないと思われるような場の量とその微分の関数を作り，その場の量を満たす微分方程式を見いだす．
高橋康・柏太郎「量子場を学ぶための場の解析力学入門（増補第 2 版）」（講談社，2005 年）

- 変分原理による方法は，Hilbert が Einstein と並行して重力場の方程式を求める時とった方法である．
- 【参考文献】中嶋慧・松尾衛「一般ゲージ理論と共変解析力学」（現代数学社，2020 年）

重力場の方程式

これから関係してくる諸量．... 重力＝時空間の曲がり具合．

- 計量テンソル $g_{\mu\nu}$（2 階共変テンソル）．
- Christoffel の記号（接続）．

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}).$$

- 曲率テンソル（$(1,3)$-型テンソル）．

$$R^{\kappa}_{\ \lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\kappa}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}.$$

- Ricci テンソル．

$$R_{\mu\nu} := R^{\lambda}_{\ \mu\lambda\nu}.$$

  これは対称テンソルである（証明は「補遺」参照）．

- スカラー曲率．

$$R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

- 微小体積要素 $\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4 x \qquad (\, g = \det(g_{\mu\nu})\,).$

重力場の方程式

重力場の Lagrangian 密度．

$$\mathscr{L}\mathrm{gravity} = \left(\partial_\lambda g_{\mu\nu}\ \text{の 2 次式}\right) =: G \quad \text{と予想される．}$$

- Newton 力学では重力ポテンシャルは 2 階線形微分方程式に従う．
- 電磁場．

$$\text{Maxwell 方程式} \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\mu, \ \text{etc.}$$

$$\text{Lagrangian 密度} \quad \mathscr{L}_{\mathrm{e.m.}} = -\frac{1}{4\mu_0 c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{c} j^\mu A_\mu .$$

ところが，G はスカラーではあり得ない．

【理由】

- 等価原理：任意の点の微小近傍は座標変換で平坦な Minkowski 空間（無重力空間）にできる．
- 任意の点で $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ は座標変換により 0 とできる．
- G がスカラーならばすべての点で $G = 0$ となってしまう．

重力場の方程式

そこで次のような Lagrangian 密度を考える．

$$\sqrt{-g}G + \partial_\mu \mathscr{D}^\mu =: \sqrt{-g}\, l, \quad l \,:\, \text{スカラー}, \quad G \,:\, \partial_\lambda g_{\mu\nu} \text{ の 2 次式}$$

$$(\partial_\mu \mathscr{D}^\mu \text{ は変分には効かない}).$$

実は，$l = \text{const.} \times R$（$R$：スカラー曲率）が上の式を満たす．

重力場の Lagrangian 密度

$$\mathscr{L}_{\text{gravity}} = \frac{1}{2c\kappa} R,$$

R　スカラー曲率

κ　Einstein 係数，あとで決める．

重力場の方程式

系全体の作用，Lagrangian 密度

$$S_{\rm tot} = S_{\rm gravity} + S_{\rm mat} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}(\mathscr{L}_{\rm gravity} + \mathscr{L}_{\rm mat}),$$

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\rm gravity} &\quad \text{重力場の Lagrangian 密度,} \\ \mathscr{L}_{\rm mat} &\quad \text{粒子\& 電磁場の Lagrangian 密度.} \end{aligned}$$

* d^4x でなく $\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x$ が座標変換で不変であることに注意．

粒子& 電磁場の Lagrangian 密度（q：電荷，$z^\mu(\tau)$：粒子の位置）．

$$\mathscr{L}_{\rm mat} = \mathscr{L}_{\rm particle} + \mathscr{L}_{\rm e.m.} + \mathscr{L}_{\rm int},$$

物体 $\quad \sqrt{-g}\,\mathscr{L}_{\rm particle} := \int \mathrm{d}\tau\sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\frac{\mathrm{d}z^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}z^\nu}{\mathrm{d}\tau}}\,\delta^4(x - z(\tau)),$

電磁場 $\quad \sqrt{-g}\,\mathscr{L}_{\rm e.m.} := -\frac{\sqrt{-g}}{4\mu_0 c}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x),$

相互作用* $\quad \sqrt{-g}\,\mathscr{L}_{\rm int} := \frac{q}{c}\int \mathrm{d}\tau\frac{\mathrm{d}z^\mu}{\mathrm{d}\tau}A_\mu(x)\delta^4(x - z(\tau)).$

* $\sqrt{-g}\mathscr{L}_{\rm int}$ は $g_{\mu\nu}$ を含まないので，$g_{\mu\nu}$ について変分をとるとき効かない．
 よって，以降は考えない．

重力場の方程式

$g^{\mu\nu}$ についての変分 $\delta S_{\mathrm{tot}} = 0$ とする

$$\begin{aligned}\delta S_{\mathrm{tot}} &= \delta S_{\mathrm{gravity}} + \delta S_{\mathrm{mat}} \\ &= \frac{1}{2c\kappa}\int \mathrm{d}^4x \delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, G_{\mu\nu} - \frac{1}{2c}\int \mathrm{d}^4x \delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, T_{\mu\nu} = 0,\end{aligned}$$

where $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ (Einstein テンソル),

$$T_{\mu\nu} := \frac{2c}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathscr{L}_{\mathrm{mat}})}{\partial g_{\mu\nu}}$$ (エネルギー・運動量テンソル).

重力場の方程式

これにより重力場 $g_{\mu\nu}$ が決まる.

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}.$$

- 左辺：重力場の項.
- 右辺：物質（粒子& 電磁場）の項.

重力場の方程式

物質（粒子& 電磁場）のエネルギー・運動量テンソル

$$T^{\mu\nu} = M^{\mu\nu} + \mathscr{E}^{\mu\nu} = \text{粒子} + \text{電磁場},$$

$$M^{\mu\nu} = \frac{2c}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathscr{L}_{\mathrm{particle}})}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \int \mathrm{d}\tau\, mc \frac{\mathrm{d}z^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}z^\nu}{\mathrm{d}\tau} \delta^4(x - z(\tau)),$$

$$\mathscr{E}^{\mu\nu} = \frac{2c}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathscr{L}_{\mathrm{e.m.}})}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{\mu_0} \left(g_{\kappa\lambda} F^{\kappa\mu} F^{\lambda\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right)$$

とくに，

$$\rho := -\frac{1}{c^2} M^\mu{}_\mu = mc \int \mathrm{d}\tau\, \frac{\delta^4(x - z(\tau))}{\sqrt{-g}} \quad \text{質量密度}.$$

$*$ 非相対論的極限で

$$\rho \to mc \int \mathrm{d}t\, \delta(x^0 - ct)\, \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}) = m\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}).$$

重力場の方程式

重力場の方程式を書き直す．

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}.$$

μ, ν について縮約をとって，

$$R - \frac{1}{2} \cdot 4R = \kappa T^{\mu}{}_{\mu} =: \kappa T, \quad R = -\kappa T,$$
$$\therefore \quad R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right).$$

$T = T^{\mu}{}_{\mu}$ について，

$$T = T^{\mu}{}_{\mu} = M^{\mu}{}_{\mu} + \mathscr{E}^{\mu}{}_{\mu},$$
$$M^{\mu}{}_{\mu} = -c^2 \rho, \quad \mathscr{E}^{\mu}{}_{\mu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\kappa\mu} F_{\kappa\mu} - \frac{1}{4} \delta^{\mu}_{\mu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) = 0,$$
$$T = -c^2 \rho,$$

$$\therefore \quad R_{\mu\nu} = \kappa \left(M_{\mu\nu} + \mathscr{E}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} c^2 \rho g_{\mu\nu} \right).$$

$$\therefore \quad R_{\mu\nu} = \kappa \left(M_{\mu\nu} + \mathscr{E}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} c^2 \rho g_{\mu\nu} \right).$$

係数 κ を求める．そのために非相対論的極限を考える．

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad h_{\mu\nu}(x) \approx 0,$$

場は静的，i.e.， 時間微分 ≈ 0.

測地線方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} + \underbrace{\Gamma^\alpha_{00} \left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} \right)^2}_{(2)} + \underbrace{2 \sum_{k=1}^{3} \Gamma^\alpha_{0k} \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}}_{(3)} + \underbrace{\sum_{k,l=1}^{3} \Gamma^\alpha_{kl} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}\tau}}_{(4)} = 0$$

において，$\dfrac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} \approx c \gg \dfrac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau}$ であるから，(3), (4) は (2) に比べて無視できる．

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\alpha_{00} \left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} \right)^2 \approx 0.$$

重力場の方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\alpha_{00}\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \approx \frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} + c^2\Gamma^\alpha_{00} \approx 0.$$

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2}\eta^{\alpha\lambda}(\partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}) \quad \text{より} \quad \Gamma^k_{00} \approx -\frac{1}{2}\partial_k h_{00} \quad (\,k = 1, 2, 3\,).$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}t^2} \approx \frac{c^2}{2}\partial_k h_{00} \quad (\,k = 1, 2, 3\,).$$

これを $\dfrac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}t^2} = -\partial_k \varphi$ （φ：重力ポテンシャル）と比較して，

$$h_{00} = -\frac{2}{c^2}\varphi.$$

一方，R_{00} に着目する．

$$R_{00} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{00} - \underbrace{\partial_0 \Gamma^\rho_{0\rho}}_{\text{時間微分}\approx 0} + \underbrace{\Gamma^\rho_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma_{00} - \Gamma^\rho_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho 0}}_{\mathrm{O}(h^2)\approx 0}$$

$$\approx \sum_{i=1}^{3} \partial_i \Gamma^i_{00} \approx -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} \approx \frac{1}{c^2}\nabla^2 \varphi.$$

重力場の方程式

$$R_{00} \approx \frac{1}{c^2}\nabla\varphi.$$

重力場の方程式 $R_{\mu\nu} = \kappa\left(M_{\mu\nu} + \mathscr{E}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}c^2\rho g_{\mu\nu}\right)$ より

$$R_{00} = \kappa\left(M_{00} + \mathscr{E}_{00} - \frac{1}{2}c^2\rho\right).$$

先程の計算より $M_{00} \approx c^2\rho$，そして，電磁場のエネルギー密度 $\mathscr{E}_{00} \ll M_{00}$ であるから，

$$R_{00} \approx \frac{\kappa}{2}c^2\rho, \quad \nabla^2\varphi \approx \frac{\kappa c^4}{2}\rho.$$

これを非相対論で重力ポテンシャルが満たす式

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G_{\mathrm{N}}\rho \quad \left(G_{\mathrm{N}}\ :\ \text{万有引力定数}\right)$$

と比較して，

$$\kappa = \frac{8\pi G_{\mathrm{N}}}{c^4}.$$

重力場の方程式

Einstein 方程式：重力場の方程式

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G_{\mathrm{N}}}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

重力場の方程式

Einstein 方程式：重力場の方程式

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G_{\mathrm{N}}}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

【余談】Einstein は作用 S_{tot} に定数項 $\displaystyle\int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g}\Lambda$ を足した．

$$\Lambda \ : \ \text{宇宙定数}, \quad \text{重力場の方程式は} \quad G_{\mu\nu} \to G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\Lambda g_{\mu\nu}.$$

- 宇宙が定常でいられるように，この項を足した．
- のちに宇宙は膨張していることがわかり，Einstein はこの項を足したことを後悔した．
- ところが近年，宇宙が加速膨張していることがわかり，この項が必要になった．

Contents

1 はじめに

2 重力場の方程式

3 Schwarzschild 計量

4 まとめ

Schwartschild 計量：一番簡単な宇宙のモデル

- 球対称な計量.
- 1 個の星がつくる重力場.

次の形の計量を仮定する（球座標 (r, θ, φ)，r のみの関数）.

$$ds^2 = g_{00}(r)(\mathrm{d}x^0)^2 + g_{rr}(r)\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2,$$
$$\mathrm{d}\Omega^2 := \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2.$$

時空間には物質（粒子& 電磁場）はないとする.
Einstein 方程式（物質のない真空場）

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0.$$

$R_{\mu\nu} = 0$（Ricci 平坦）な場 $g_{\mu\nu}$ は Einstein 方程式を満たす.
$R_{\mu\nu} = 0$（$g_{\mu\nu}$ についての微分方程式）を解いて⋯（「補遺」参照）

Schwarzschild 計量

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r}\right)(\mathrm{d}x^0)^2 + \left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2,$$

i.e., $g_{00} = -\left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r}\right), \quad g_{rr} = \left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r}\right)^{-1}, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta,$

$r_\mathrm{S} > 0$: Schwarzschild 半径 (const.).

Schwarzschild 計量

Schwardschild 計量

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r}\right)(\mathrm{d}x^0)^2 + \left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2.$$

これから，Schwarzschild 半径 r_S の具体形を求めるため，この計量の重力場の下での粒子の運動を考え，さらに非相対論的極限をとる．

粒子の運動．

$$\text{作用}\quad S = \int \mathrm{d}\sigma\, L, \quad L := -mc\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\sigma}}.$$

正準運動量

$$P_\mu := \frac{\partial L}{\partial(\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau)} = mg_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu/\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}\sigma}, \quad P_\mu P^\mu = -m^2c^2.$$

x^0, θ, φ は循環座標である（Lagrangian L に陽に含まれない）から，
P_0, P_θ, P_φ は定数である．

Schwardschild 計量における運動

次のようにおく（$\mathscr{E}$：定数）．

$$P_0 = -mc\mathscr{E}, \quad P_\theta = 0, \quad P_\varphi = 0.$$

いまは r_{S} を求めるのが目的だから，特別な場合 $P_\theta = P_\varphi = 0$ を考える．

$$\begin{aligned} P_\mu P^\mu &= g^{00}(P_0)^2 + g^{rr}(P_r)^2 + g^{\theta\theta}(P_\theta)^2 + g^{\varphi\varphi}(P_\varphi)^2 \\ &= -\left(1 - \frac{r_{\mathrm{S}}}{r}\right)^{-1} m^2c^2\mathscr{E}^2 + \left(1 - \frac{r_{\mathrm{S}}}{r}\right)(P_r)^2 \\ &= -m^2c^2. \end{aligned}$$

とくに $\sigma = \tau$（固有時）にとれば，

$$-\left(1 - \frac{r_{\mathrm{S}}}{r}\right)^{-1}\mathscr{E}^2 + \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{r_{\mathrm{S}}}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = -1,$$

$$\therefore \quad \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = c^2\left\{\mathscr{E}^2 - \left(1 - \frac{r_{\mathrm{S}}}{r}\right)\right\}.$$

Schwardschild 計量における運動

Newton 近似（非相対論的近似）を考える．

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = c^2\left\{\mathscr{E}^2 - \left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r}\right)\right\}$$

の両辺を τ で微分して，$\tau \approx t$ とすると，

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} \approx -\frac{mc^2 r_\mathrm{S}}{2r^2}.$$

これを，Newton 近似における万有引力による運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{G_\mathrm{N} M m}{r^2} \quad (\, M \;:\; \text{天体の質量}, \quad G_\mathrm{N} \;:\; \text{万有引力定数}\,)$$

と比較して，

Schwarzschild 半径

$$r_\mathrm{S} = \frac{2G_\mathrm{N} M}{c^2}.$$

Schwarzschild 計量における運動

Schwarzschild 計量

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r}\right)(\mathrm{d}x^0)^2 + \left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2,$$

$$\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2,$$

$$r_\mathrm{S} = \frac{2G_\mathrm{N}M}{c^2} \quad \text{Schwarzschild 半径},$$

$$M \ : \ \text{天体の質量}, \quad G_\mathrm{N} \ : \ \text{万有引力定数}.$$

Schwarzschild 計量における運動

Schwarzschild 計量

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{r_\mathrm{S}}{r}\right)(\mathrm{d}x^0)^2 + \left(1-\frac{r_\mathrm{S}}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2,$$

$$\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2,$$

$$r_\mathrm{S} = \frac{2G_\mathrm{N}M}{c^2} \quad \text{Schwarzschild 半径},$$

M ：天体の質量，　G_N ：万有引力定数.

とくに動径 r のみに依る運動の場合，

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \mathscr{E}^2 - \left(1-\frac{r_\mathrm{S}}{r}\right). \tag{1}$$

無限遠で物体は静止しているとすると，(1) で $r\to\infty$ として

$$\mathscr{E} = 1, \quad P_0 = -mc,$$

エネルギー　$E = -cP_0 = mc^2$　物体の静止エネルギー.

$\boxed{\text{光の軌道}}$

動径方向に進む光の軌道を求める．

光の軌道上で $\mathrm{d}s = 0$, そして，$\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\varphi = 0$ より

$$-\left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r}\right)(\mathrm{d}x^0)^2 + \left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 = 0, \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r}\right).$$

領域 $r > r_\mathrm{S}$ を考えると，

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r}.$$

この微分方程式を解いて，

$$r - r_0 + r_\mathrm{S} \log\left(\frac{r - r_\mathrm{S}}{r_0 - r_\mathrm{S}}\right) = c(t - t_0) \quad (\, r_0 > r_\mathrm{S}, t_0 \ : \ \text{const.}\,).$$

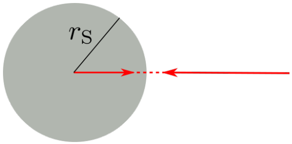
Schwarzschild 計量における運動

$$r - r_0 + r_S \log\left(\frac{r - r_S}{r_0 - r_S}\right) = c(t - t_0) \quad (\, r_0 > r_S,\ t_0\ :\ \text{const.}\,),$$

$$r_S = \frac{2G_N M}{c^2} \quad \text{Schwarzschild 半径.}$$

外部 $r > r_S$ から発した光が $r = r_S$ の点に到達するまでの時間，
内部 $r < r_S$ から発した光が $r = r_S$ に到達するまでの時間は無限大 ∞ である．

- $r \leq r_S$：Schwarzschild ブラックホール．



内部 $r < r_s$ から外へは光は飛び出せない．

外部 $r > r_S$ から中へは光は入れない．

Schwarzschild 計量における運動

$$r - r_0 + r_{\mathrm{S}} \log\left(\frac{r - r_{\mathrm{S}}}{r_0 - r_{\mathrm{S}}}\right) = c(t - t_0) \quad (\, r_0 > r_{\mathrm{S}},\ t_0 \ :\ \text{const.}\,),$$

$$r_{\mathrm{S}} = \frac{2G_{\mathrm{N}}M}{c^2} \quad \text{Schwarzschild 半径.}$$

外部 $r > r_{\mathrm{S}}$ から発した光が $r = r_{\mathrm{S}}$ の点に到達するまでの時間，
内部 $r < r_{\mathrm{S}}$ から発した光が $r = r_{\mathrm{S}}$ に到達するまでの時間は無限大 ∞ である．

- $r \leq r_{\mathrm{S}}$：Schwarzschild ブラックホール．

天体が小さく凝縮されて 半径 $< r_{\mathrm{S}}$ ならば，ブラックホールが生じる．

- 地球（質量 $M = 5.9742 \times 10^{24}\mathrm{kg}$）$\to r_{\mathrm{S}} = 0.88729 \times 10^{-2}\mathrm{m}$（約 $1\mathrm{cm}$）．
- 太陽（質量 $M = 1.98892 \times 10^{30}\mathrm{kg} \to r_{\mathrm{S}} = 2.9540 \times 10^{3}\mathrm{m}$
  （約 $3\mathrm{km}$，太陽の半径約 70 万 km）．

1 はじめに

2 重力場の方程式

3 Schwarzschild 計量

4 まとめ

まとめ

- Einstein 方程式：重力場の従う方程式．
  変分原理（Einstein-Hilbert 作用）

$$S_{\text{gravity}} = \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g}\, R, \quad R\ :\ \text{スカラー曲率}.$$

  Einstein 方程式

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G_{\mathrm{N}}}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

- Schwarzschild 計量．
  球対称な重力場．一番簡単な宇宙モデル．
  ブラックホール．