

一般相対性理論 (3)

解析力学～幾何学的視点から～(15)

緒方秀教

電気通信大学 情報・ネットワーク工学専攻

July 16, 2022

Contents

- 1 これまでの復習
- 2 赤方偏移
- 3 水星の近日点移動
- 4 重力による光路の曲げ（重力レンズ）
- 5 まとめ
- 6 補遺

「補遺」は動画では説明しません．概要欄に記した URL にアクセスして PC スライドを御覧ください．

特殊相対性理論

- すべての慣性系で物理法則は同じ形に表される。
- すべての慣性系で光速度 c は不変である。
- 4次元時空間：Minkowski 空間。

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z),$$

スカラー $ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2, \quad \tau : \text{固有時.}$$

- Lorentz 変換：慣性系間の座標変換。

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu}, \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta := \text{diag}(-1, 1, 1, 1).$$

- 物体の速度 $<$ 光速度 c .
- 動いていると時間の経過が遅くなる，物体の長さが短くなる，...

これまでの復習：一般相対性理論

一般相対性理論：慣性系 → 一般の座標系.

- すべての座標系で物理法則は同じ形で表される.
- 等価原理：時空間の任意の微小領域は Minkowski 空間と写しあえる (特殊相対論との接点).

- 時空間：(擬) Riemann 空間 (多様体).

計量 ($g_{\mu\nu}$), $ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$... 時空間内の「長さ」.

- 物体の運動.

作用 $\int ds \rightarrow$ 停留,

↓

$$\text{測地線方程式 } \frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0.$$

これまでの復習：一般相対性理論

- Einstein 方程式：重力場を決定する方程式

重力場の作用 $\int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2c\kappa} R \right) +$ 物質場の作用,

R : スカラー曲率 (\leftarrow 計量 $g_{\mu\nu}$ の微分),

$\kappa = \frac{8\pi G_N}{c^4}$: Einstein 係数 (G_N : 万有引力定数).

↓

Einstein 方程式

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R(+\Lambda g_{\mu\nu}) = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

$T_{\mu\nu}$: エネルギー・運動量テンソル,

$R_{\mu\nu}$: Ricci テンソル (\leftarrow 曲率テンソル \leftarrow 計量 $g_{\mu\nu}$)

(Λ : 宇宙定数).

これまでの復習：一般相対性理論

- Schwarzschild 計量：1 点の天体による球対称な重力場.

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) (dx^0)^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

$$r_S = \frac{2G_N M}{c^2} \quad \begin{array}{l} \text{Schwarzschild 半径} \\ (M: \text{天体の質量}, G_N: \text{万有引力定数}). \end{array}$$

↓

ブラックホール：天体中心，半径 r_S の球内部には外部から入り込めない。
太陽 $r_S \simeq 3\text{km}$ ，地球 $r_S \simeq 1\text{cm}$ 。

これまでの復習：一般相対性理論

- Schwarzschild 計量：1 点の天体による球対称な重力場。

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) (dx^0)^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

$$r_S = \frac{2G_N M}{c^2} \quad \begin{array}{l} \text{Schwarzschild 半径} \\ (M: \text{天体の質量}, G_N: \text{万有引力定数}). \end{array}$$

↓

ブラックホール：天体中心，半径 r_S の球内部には外部から入り込めない。
太陽 $r_S \simeq 3\text{km}$ ，地球 $r_S \simeq 1\text{cm}$ 。

今回の予定

Schwarzschild 計量から導かれる一般相対論特有の現象を説明する。

- 赤方偏移。
- 水星の近日点移動。
- 重力による光路の曲げ（重力レンズ）。

Contents

- 1 これまでの復習
- 2 赤方偏移**
- 3 水星の近日点移動
- 4 重力による光路の曲げ（重力レンズ）
- 5 まとめ
- 6 補遺

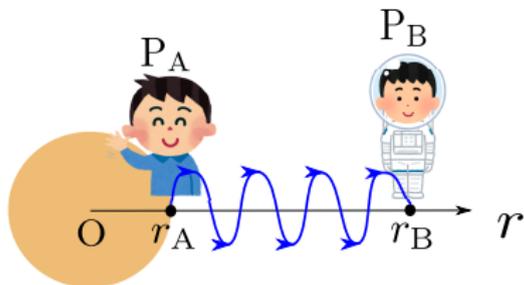
赤方偏移 (redshift)

重力の影響により光の色 (波長) が変わる.

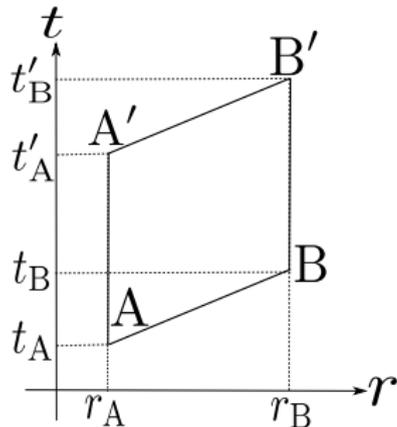
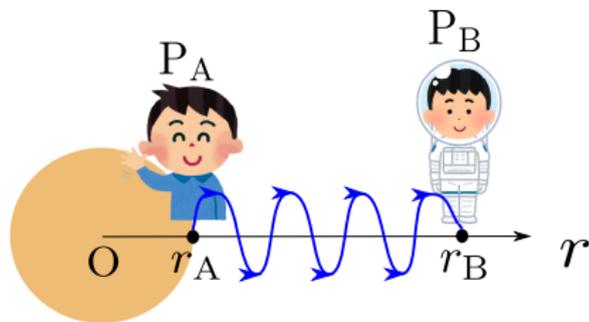
Schwarzschild 計量を用いて説明できる.

天体上の人 P_A が宇宙空間の人 P_B に対して光を放つ.

- 光を放つ時間: P_A が見て $t_A \sim t_B$.
- 人の位置: 天体の中心から, P_A は r_A , P_B は r_B .
- ふたりとも天体から見て静止, 同じ半直線上にいる.



赤方偏移



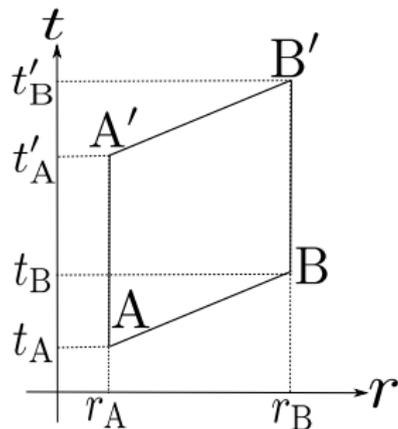
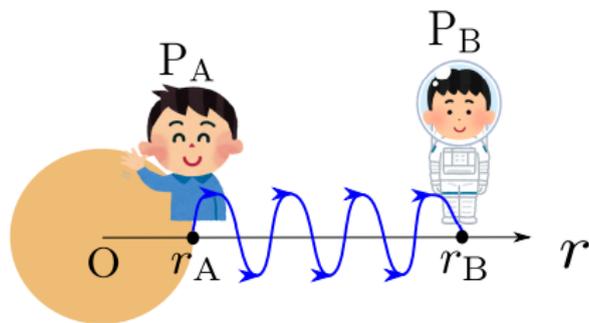
P_B が光を受け取る時間 $t_B \sim t'_B$ を調べる.

光に沿って $ds^2 = 0$ であるから,

$$g_{00}(r)(dx^0)^2 + g_{rr}(r)dr^2 = 0,$$

$$dx^0 = \underbrace{\sqrt{-\frac{g_{rr}(r)}{g_{00}(r)}}}_{r \text{ にしか依らない}} dr .$$

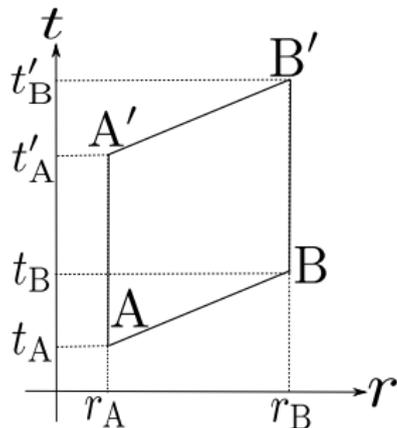
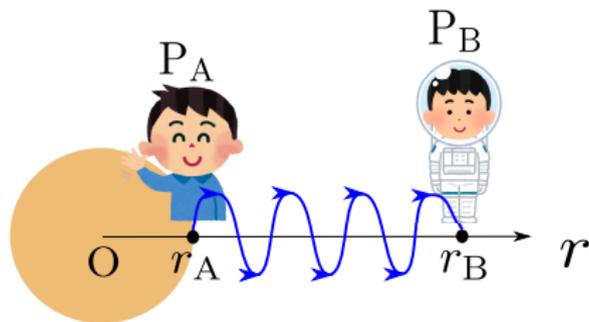
赤方偏移



P_B が光を受け取る時間 $t_B \sim t'_B$ を調べる.

$$\left. \begin{aligned} c(t_B - t_A) &= \int_A^B dx^0 \\ c(t'_B - t'_A) &= \int_{A'}^{B'} dx^0 \end{aligned} \right\} = \int_A^B \sqrt{-\frac{g_{rr}(r)}{g_{00}(r)}} dr,$$
$$t_B - t_A = t'_B - t'_A, \quad t'_A - t_A = t'_B - t_B.$$

赤方偏移



P_B が光を受け取る時間 $t_B \sim t'_B$ を調べる.

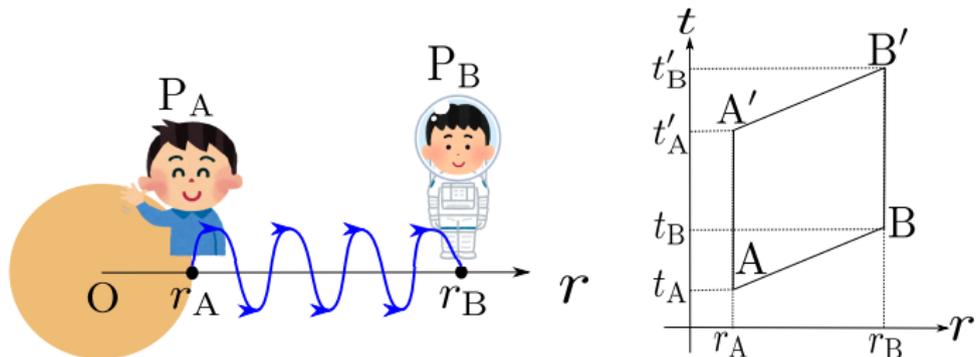
$$t'_A - t_A = t'_B - t_B,$$

A が光を放つ時間 = B が光を受け取る時間 =: ΔT .

固有時に直すと,

$$\Delta\tau_A = \sqrt{-g_{00}(r_A)}\Delta T, \quad \Delta\tau_B = \sqrt{-g_{00}(r_B)}\Delta T.$$

赤方偏移



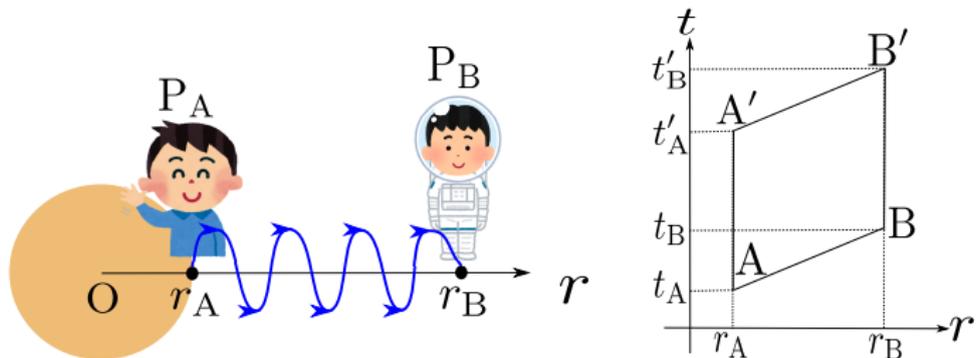
$$\begin{cases} \nu_A : & P_A \text{ から見た光の振動数,} \\ \nu_B : & P_B \text{ から見た光の振動数.} \end{cases}$$

固有時で見た光の振動回数 N は P_A, P_B どちらから見ても同じである。

$$N_A := \nu_A \Delta\tau_A = N_B := \nu_B \Delta\tau_B,$$

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{\Delta\tau_A}{\Delta\tau_B} = \sqrt{\frac{|g_{00}(r_A)|}{|g_{00}(r_B)|}}.$$

赤方偏移



$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{\Delta\tau_A}{\Delta\tau_B} = \sqrt{\frac{|g_{00}(r_A)|}{|g_{00}(r_B)|}}$$

$|g_{00}(r)| = 1 - r_S/r$ より $|g_{00}(r_A)| < |g_{00}(r_B)|$,

$$\therefore \nu_B < \nu_A.$$

- P_B から見た光の振動数は P_A から見た振動数より小さい。
- P_B から見た光の波長は P_A から見た波長より長い (赤い方に近づいている)。

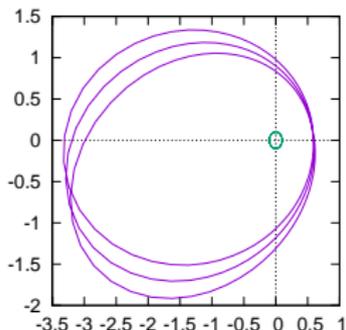
Contents

- 1 これまでの復習
- 2 赤方偏移
- 3 水星の近日点移動**
- 4 重力による光路の曲げ（重力レンズ）
- 5 まとめ
- 6 補遺

水星の近日点移動

惑星の運動

- 太陽の周りを楕円軌道を描いて運動する。
- **近日点**：太陽に最も近い点。
- 実は**近日点は回転ごとに少しずつずれている**。
 - 他の惑星の影響 . . . Newton 力学で説明できる。
 - それでも微小なずれが残る。 → **一般相対性理論**により説明できる！



水星の近日点移動

Schwarzschild 計量の時空間における質点の運動を考える。

* 運動は平面 $\theta = \pi/2$ 上であると仮定する。

作用から出発する ($\dot{} = d/d\tau$)。

$$\delta \int d\tau \left\{ - \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - r_S/r} + r^2 \dot{\phi}^2 \right\}^{1/2} = 0.$$

$\int d\tau \sqrt{\dots}$ の形の作用は扱いにくい。

これよりも、次の補題を用いるほうが簡単である。

水星の近日点移動

Schwarzschild 計量の時空間における質点の運動を考える。

* 運動は平面 $\theta = \pi/2$ 上であると仮定する。

作用から出発する ($\dot{\ } = d/d\tau$)。

$$\delta \int d\tau \left\{ - \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - r_S/r} + r^2 \dot{\phi}^2 \right\}^{1/2} = 0.$$

$\int d\tau \sqrt{\dots}$ の形の作用は扱いにくい。

これよりも、次の補題を用いるほうが簡単である。

補題

次の変分問題は測地線方程式を与える。

$$\delta \int d\tau T(x, \dot{x}) = \delta \int d\tau \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0.$$

水星の近日点移動

【補題の証明】 T に対する Euler-Lagrange 方程式.

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial T}{\partial x^\mu} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\nu, \quad \frac{\partial T}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^\mu} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\nu,$$

を代入して少々計算すると、次を得る.

$$\ddot{x}^\lambda + \frac{1}{2} g^{\lambda\mu}(x) [2\partial_\kappa g_{\mu\nu}(x) - \partial_\mu g_{\kappa\nu}(x)] \dot{x}^\kappa \dot{x}^\nu = 0.$$

添字の付替え

$$2\partial_\kappa g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\kappa \dot{x}^\nu = [\partial_\nu g_{\mu\kappa}(x) + \partial_\kappa g_{\mu\nu}(x)] \dot{x}^\kappa \dot{x}^\nu$$

を行って、

$$\ddot{x}^\lambda + \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \underbrace{[\partial_\nu g_{\mu\kappa} + \partial_\kappa g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\kappa\nu}]}_{\Gamma_{\kappa\nu}^\lambda} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\nu = 0.$$

∴ 測地線方程式を得た.

水星の近日点移動

補題を我々の問題に当てはめる.

$$\delta \int d\tau \mathcal{L} = \delta \int d\tau \left[- \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - r_S/r} + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] = 0.$$

被積分関数 \mathcal{L} は t, φ を陽に含まないのので, 次の量が運動の定数となる.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -2 \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) \dot{t}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = 2r^2 \dot{\varphi},$$

そこで, 次の定数 ϵ, j を導入する.

$$\epsilon := \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) \dot{t}, \quad j := r^2 \dot{\varphi}.$$

これらを,

$$-ds^2 = c^2 d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

$$\text{i.e.,} \quad c^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - r_S/r} - r^2 \dot{\varphi}^2$$

に代入する.

水星の近日点移動

$$1 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \left[\epsilon^2 - \frac{j^2}{c^2} \left(\frac{r'}{r^2}\right)^2 \right] - \frac{j^2}{r^2}.$$

$u := \frac{1}{r}$ とおくと、少々計算して次を得る.

$$(u')^2 + u^2 - \frac{c^2 r_S}{j^2} u - \frac{2E}{j^2} = r_S u^3 \quad (E := c^2(\epsilon^2 - 1)). \quad (1)$$

Newton 力学の解からの変形のため、解を次のようにおく.

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{l} [1 + e \cos(\eta\varphi)],$$

$\eta = 1 \rightarrow$ Newton 力学の解, $e \approx 0 \dots$ ほぼ円である.

これを (1) に代入して解 $u = 1/r$ を求める.

以下、計算の詳細は「補遺」に記します.

補遺を記した PC スライドが概要欄に記した URL に置いてあります.

水星の近日点移動

計算結果は次の通り.

$$r = \frac{l}{1 + e \cos(\eta\varphi)},$$
$$l \approx \frac{2j^2}{r_s c^2}, \quad \eta \approx 1 - \frac{3r_s}{2l}.$$

水星の近日点移動

計算結果は次の通り.

$$r = \frac{l}{1 + e \cos(\eta\varphi)},$$
$$l \approx \frac{2j^2}{r_S c^2}, \quad \eta \approx 1 - \frac{3r_S}{2l}.$$

赤字が一般相対性理論による補正.

近日点移動

惑星が近日点から出発して再び近日点に戻るまでの角度変化.

$$\frac{2\pi}{\eta} \approx 2\pi \left(1 + \frac{3r_S}{2l} \right).$$

その 2π からのずれ.

$$\delta = 2\pi \cdot \frac{3r_S}{2l}.$$

水星の近日点移動

水星の近日点移動.

前頁の結果からの計算値：100 年につき $\delta = 43.03$ 秒.

一方，観測値は

- 100 年につき約 574 秒 (1 秒 = $1/3600^\circ$).
- そのずれの大部分は，実は Newton 力学で説明できる.
他の惑星の影響：金星約 280 秒，木星約 150 秒，他の惑星 100 秒.
- 残りの約 43 秒が謎だったが，一般相対性理論により説明できた.

Contents

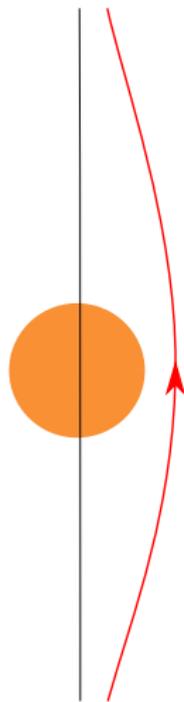
- 1 これまでの復習
- 2 赤方偏移
- 3 水星の近日点移動
- 4 重力による光路の曲げ（重力レンズ）**
- 5 まとめ
- 6 補遺

重力による光路の曲げ（重力レンズ）

重力レンズ

光は重力によって行路を曲げられる。

これも Schwarzschild 計量により説明できる。



重力による光路の曲げ (重力レンズ)

光路上では $ds = 0$ ($d\tau = 0$) であるから、固有時 τ 以外のパラメータ λ を用いねばならない。

$$\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - r_S/r} - r^2 \dot{\varphi}^2 = 0 \quad \left(\dot{} = \frac{d}{d\lambda}\right). \quad (2)$$

惑星運動と同様、次の量が定数となる：

$$j := r^2 \dot{\varphi}, \quad \epsilon := \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \dot{t}.$$

これを (2) に代入して、次を得る。

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 &= \epsilon^2 + \frac{j^2 r_S}{r^3} - \frac{j^2}{r^2}, & \frac{d\varphi}{d\lambda} &= \frac{j}{r^2}. \\ \therefore \frac{d\varphi}{dr} &= \pm \frac{j/r^2}{\sqrt{\epsilon^2 + j^2 r_S/r^3 - j^2/r^2}}. \end{aligned}$$

重力による光路の曲げ（重力レンズ）

一般相対論の効果を無視した場合

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{j/r^2}{\sqrt{\epsilon^2 + j^2 r_s/r^3 - j^2/r^2}}.$$

$r_s \approx 0$ より, $j^2 r_s/r^3$ の項を無視すれば,

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{j/r^2}{\sqrt{\epsilon^2 - j^2/r^2}}, \quad \varphi = \pm \int dr \frac{j/r}{\sqrt{\epsilon^2 - j^2/r^2}}.$$

$u = 1/r$ とおいて,

$$\varphi = \mp \int \frac{j du}{\sqrt{\epsilon^2 - j^2 u^2}} = \mp \arcsin \left(\frac{j u}{\epsilon} \right), \quad u = \frac{\epsilon}{j} \cos \varphi$$

(積分定数を適当に取った).

$$r = \frac{j}{\epsilon \cos \varphi} \quad y \text{ 軸に平行な直線.}$$

重力による光路の曲げ（重力レンズ）

一般相対論の効果を考慮

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dr} &= \frac{\pm j/r^2}{\sqrt{\epsilon^2 + j^2 r_S r^3 - j^2/r^2}} \\ &= \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - r_S/r}} \frac{j/r^2}{\sqrt{\epsilon^2/(1 - r_S/r) - j^2/r^2}} \\ &\approx \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - r_S/r}} \frac{j/r^2}{\sqrt{\epsilon^2(1 + r_S/r) - j^2/r^2}}.\end{aligned}$$

- ① 次の微分方程式から ϕ を求める（赤字 $\rightarrow 1$ ）。

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{j/r^2}{\sqrt{\epsilon^2(1 + r_S/r) - j^2/r^2}}.$$

- ② ϕ に微小な補正を行うことにより ϕ を求める。

重力による光路の曲げ (重力レンズ)

- ① 次の微分方程式から ϕ を求める.

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dr} &= \frac{j/r^2}{\sqrt{\epsilon^2(1+r_S/r) - j^2/r^2}} \\ &= \frac{b}{r\sqrt{r^2 + r_S r - b^2}} \quad \left(b = \frac{j}{\epsilon}\right).\end{aligned}$$

$r^2 + r_S r - b^2 = 0$ の解を r_{\pm} とおく.

$$r_{\pm} := a(\pm e - 1) \quad \left(a := \frac{r_S}{2}, e := \sqrt{1 + \frac{4b^2}{r_S^2}}\right).$$

$$\phi = \int \frac{\sqrt{-r_+ r_-} dr}{r\sqrt{(r-r_+)(r-r_-)}} = - \int \frac{du}{\sqrt{(1/r_+ - u)(1/r_- - u)}}.$$

ここで $r = 1/u$ とおいた. この不定積分は簡単に計算できる.

重力による光路の曲げ (重力レンズ)

① (続)

$$\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \cos(\phi - \phi_0) = \frac{2}{r} - \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right)$$

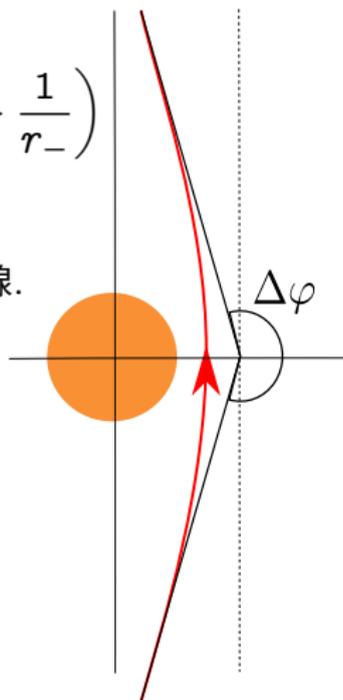
(ϕ_0 : const.).

$$\therefore r = r(\phi) = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \phi} \quad \dots \text{双曲線.}$$

② 本来求めるべき φ は次で与えられる.

$$\varphi = (\pm) \int \frac{d\phi}{\sqrt{1 - r_S/r(\phi)}}.$$

無限遠から質点 (原点) に近づく光線が再び無限遠へ飛び去ってゆく際の曲がり角は $\alpha := \Delta\varphi - \pi$ で与えられる.



重力による光路の曲げ（重力レンズ）

② (続) $\Delta\varphi$ を求める.

$$\Delta\varphi = 2 \int_0^{\phi_+} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - r_S/r(\phi)}} \simeq 2 \int_0^{\phi_+} d\phi \left(1 + \frac{r_S}{2r(\phi)} \right),$$

$$\phi_+ : r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \phi_+} = \infty, \quad \text{i.e.,} \quad 1 + e \cos \phi_+ = 0.$$

ϕ_+ は $\pi/2$ より少しだけ大きいと考えられるので,
 $\phi_+ = \pi/2 + \delta$ ($\delta \approx 0$) とおくと,

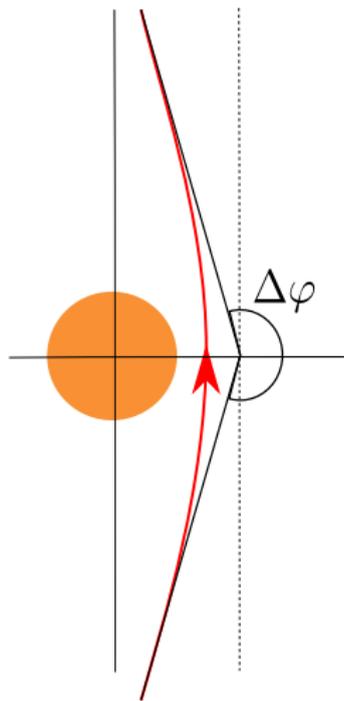
$$0 = 1 + e \cos \phi_+ = 1 - e \sin \delta, \quad \delta \approx \sin \delta = \frac{1}{e}.$$

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &\simeq 2 \int_0^{\phi_+} d\phi \left(1 + \frac{r_S(1 + e \cos \phi)}{2a(e^2 - 1)} \right) \\ &\quad (a = r_S/2 \text{ を思い出して}) \\ &= 2\phi_+ + \frac{2}{e^2 - 1} \int_0^{\phi_+} d\phi (1 + e \cos \phi) \end{aligned}$$

重力による光路の曲げ（重力レンズ）

② (続)

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &\simeq 2\phi_+ + \frac{2}{e^2 - 1}(\phi_+ + e \sin \phi_+) \\ &= \pi + 2\delta \\ &\quad + \frac{1}{e^2 - 1}(\pi + 2\delta + 2e \cos \delta) \\ &\quad (\sin \delta = 1/e \text{ と} \\ &\quad e = \sqrt{1 + 4b/r_S^2} \gg 1 \text{ より}) \\ &\simeq \pi + 2\delta + \frac{2}{e} \simeq \pi + \frac{4}{e}.\end{aligned}$$



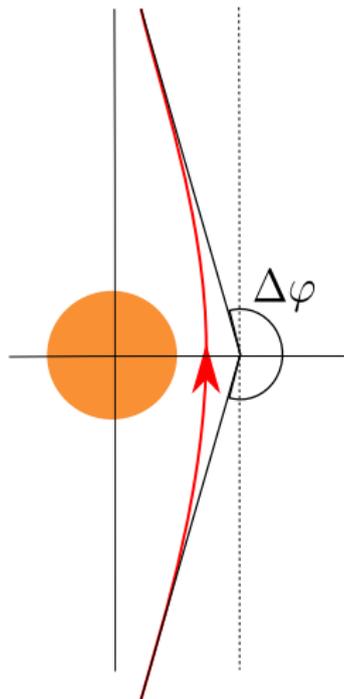
重力による光路の曲げ（重力レンズ）

② (続)

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &\simeq 2\phi_+ + \frac{2}{e^2 - 1}(\phi_+ + e \sin \phi_+) \\ &= \pi + 2\delta \\ &\quad + \frac{1}{e^2 - 1}(\pi + 2\delta + 2e \cos \delta) \\ &\quad (\sin \delta = 1/e \text{ と} \\ &\quad e = \sqrt{1 + 4b/r_S^2} \gg 1 \text{ より}) \\ &\simeq \pi + 2\delta + \frac{2}{e} \simeq \pi + \frac{4}{e}.\end{aligned}$$

光路の曲げの角度

$$\alpha = \Delta\varphi - \pi \simeq \frac{4}{e} \simeq \frac{2r_S}{b}.$$



重力による光路の曲げ（重力レンズ）

重力による光路の曲げの角度 $\alpha = \frac{2r_s}{b}$ を具体的に見積もる.

$$\text{重力の影響を受けない光路} \quad r = \frac{b}{\cos \varphi},$$

→ b : 天体の中心（原点）からの最短距離.

そこで、 $b = 7 \times 10^5 \text{ km}$ （太陽の半径）とおいてみる.

太陽の Schwarzschild 半径 $r_s = 3 \text{ km}$.

$$\alpha = \frac{2 \times 3}{7 \times 10^5} = 8.6 \times 10^{-6} \text{ rad} = 1.8 \text{ 秒}$$
$$\left(1 \text{ 秒} = \frac{1}{3600} \text{ 度} \right).$$

これは実験結果とよく符合する.

まとめ

- 一般相対性理論で最も基本的な Schwarzschild 計量を用いて、一般相対論特有の様々な現象を説明した。
 - 赤方偏移.
 - 水星の近日点移動.
 - 重力による光路の曲げ（重力レンズ）.
- Newton 力学で説明できない実験結果の理論値からの僅かなずれを、一般相対性理論により説明することができる.

まとめ

- 一般相対性理論で最も基本的な Schwarzschild 計量を用いて、一般相対論特有の様々な現象を説明した。
 - 赤方偏移.
 - 水星の近日点移動.
 - 重力による光路の曲げ（重力レンズ）.
- Newton 力学で説明できない実験結果の理論値からの僅かなずれを、一般相対性理論により説明することができる.

数理モデルとしての一般相対性理論

時空間の対称性（不変性）に基づいて運動の数理モデルとしての一般相対性理論を築き、物理現象の観測結果を数値的に極めて精密に説明した。

補遺：水星の近日点移動

$u = 1/r$ は次の方程式を満たす ($u' = du/d\varphi$).

$$(u')^2 + u^2 - \frac{c^2 r_s}{j^2} u - \frac{2E}{j^2} = r_s u^3 \quad (E := c^2(\epsilon^2 - 1)). \quad (3)$$

Newton 力学の解からの変形のため、解を次のようにおく.

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{l} [1 + e \cos(\eta\varphi)],$$

$\eta = 1 \rightarrow$ Newton 力学の解, $e \approx 0 \dots$ ほぼ円である.

これを (3) に代入すると $\cos(\eta\varphi)$ の多項式の方程式となる.

$\cos^k(\eta\varphi)$ ($k = 0, 1, 2$) の係数を比較して次の式を得る
(3 次の項 $e^3 \cos^3(\eta\varphi) \approx 0$ は無視).

補遺：水星の近日点移動

$$\frac{e^2\eta^2}{l^2} + \frac{1}{l^2} - \frac{r_{sc}^2}{j^2l} - \frac{2E}{j^2} = \frac{r_s}{l^3}, \quad (4)$$

$$\frac{2e}{l^2} - \frac{r_{sc}^2}{j^2l} = \frac{3r_{se}}{l^3}, \quad (5)$$

$$-\frac{e^2\eta^2}{l^2} + \frac{e^2}{l^2} = \frac{3e^2r_s}{l^3}. \quad (6)$$

ここで,

$$j = r^2\dot{\varphi} \approx l(r\dot{\varphi}) \approx lv \quad (v : \text{質点の速さ})$$

であるから, (5) において,

$$\frac{\text{左辺第 2 項}}{\text{右辺}} = \frac{l^2c^2}{3j^2} \approx \frac{1}{3} \left(\frac{c}{v}\right)^2 \gg 1.$$

そこで, (5) 右辺=0 とおいて次を得る.

$$l = \frac{2j^2}{r_{sc}^2} = \frac{j^2}{G_N M} \quad (M : \text{天体の質量}).$$

... Newton 力学の結果と一致する.

補遺：水星の近日点移動

前頁 (6) より,

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{3r_s}{l}} \approx 1 - \frac{3r_s}{2l} = 1 - \frac{3r_s^2 c^2}{4j^2}.$$

$$r = \frac{l}{1 + e \cos(\eta\varphi)}, \quad -\frac{3r_s}{2l} = -\frac{3r_s^2 c^2}{4j^2} \approx 0 \quad \text{Newton 力学からの補正.}$$