高校数学でわかる
微分方程式とオイラーの公式

緒方秀教

電気通信大学

2022 年 7 月 18 日（月）

はじめに

今回の内容

高校生向けの数学講座（高 3 数学前提）.

- 微分方程式：自然社会現象の数理モデル.
- オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Contents

1. はじめに
2. 微分方程式
3. オイラーの公式
4. まとめ
5. 補遺

Contents

1 はじめに

2 微分方程式

3 オイラーの公式

4 まとめ

5 補遺

微分方程式

微分方程式

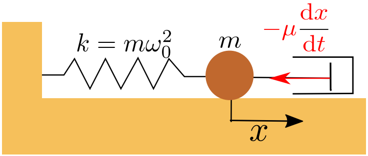
関数 $x(t)$ とその導関数 $\dfrac{dx}{dt}(t), \dfrac{d^2x}{dt^2}(t), \ldots$ を含む方程式.

【例】ニュートン (Newton) の運動方程式.
速度に比例する空気抵抗を受けるバネ振り子.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu\frac{dx}{dt},$$

$x = x(t)$ 質点の変位, m 質量,

k バネ定数, $\mu > 0$ 定数.



$-\mu\dfrac{dx}{dt}$ 空気抵抗.

この運動方程式（微分方程式）を解いて,
質点の運動（変位 $x(t)$）を求める.

微分方程式

簡単な微分方程式を解いてみる．

【例】放射性元素（炭素 14 など）の崩壊．

（応用）考古学における年代測定．

- $n(t)$：放射性元素の量．時間が経つにつれ，崩壊して減少する．
- 微小時間 Δt あたりの $n(t)$ の変化 Δn：放射性元素の量 n に比例する．

$$\Delta n = -sn\Delta t \quad (s > 0\text{：比例定数}),$$
$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = -sn.$$

$\Delta t \to 0$ とすると，

放射性元素の量 $n(t)$ が従う微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = -sn \quad (s > 0\text{：定数}).$$

微分方程式

微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = -sn$ を解いてみる．

公式

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} + sn = \mathrm{e}^{-st}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{st}n).$$

【証明】積の微分の公式 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t)y(t)] = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}y + x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ を用いる．

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{st}n) &= \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{st}}{\mathrm{d}t}n + \mathrm{e}^{st}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \\ &= s\mathrm{e}^{st}n + \mathrm{e}^{st}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{st}\left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} + sn\right).\end{aligned}$$

両辺に e^{-st} を掛けて，

$$\mathrm{e}^{-st}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{st}n) = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} + sn.$$

微分方程式

もとの微分方程式を前頁の公式を用いて変形する．

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} + sn = \mathrm{e}^{-st}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{st}n) = 0.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{st}n) = 0, \quad \mathrm{e}^{st}n = C\ (\text{定数}),$$

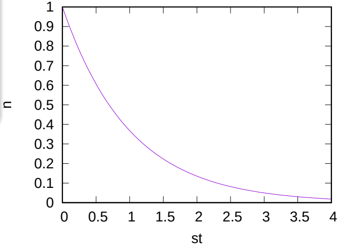
$$n(t) = C\mathrm{e}^{-st}.$$

$t = 0$ を代入すると $C = n(0)$（最初 $t = 0$ の放射性元素の量）であることがわかる．

放射性元素の量の時間変化

$$n(t) = n(0)\mathrm{e}^{-st}.$$

指数関数に従って減少してゆく．



$$\text{半減期 } T \ : \ n(T) = \frac{n(0)}{2},$$

$$T = \frac{\log 2}{s}.$$

2 階微分方程式：2 階微分まで含む微分方程式．
とくに次の形のものを考える．

定数係数 2 階線型微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + bx = 0 \quad (\, a, b \;:\; \text{定数}\,).$$

- α, β：2 次方程式 $X^2 + aX + b = 0$ の解（$\alpha \neq \beta$ とする）．
- 解と係数の関係：$a = -(\alpha + \beta)$，$b = \alpha\beta$.
- 上の微分方程式は次のように書き直される．

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - (\alpha + \beta)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \alpha\beta x = 0.$$

- さらに次のように書き直される．

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \alpha y = 0, \qquad y = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \beta x.$$

微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - (\alpha + \beta)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \alpha\beta x = 0,$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \alpha y = 0, \qquad y = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \beta x.$$

【確認】

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \beta y\right) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - \beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \alpha y &= \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - \beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \alpha\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \beta x\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - (\alpha + \beta)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \alpha\beta x.
\end{aligned}$$

微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \alpha y = 0, \quad y = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \beta x \quad (\alpha \neq \beta)$$

を解く．先程の公式を駆使する．

- まず，y を求める．

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \alpha y = \mathrm{e}^{\alpha t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-\alpha t}y) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-\alpha t}y) = 0,$$

$$\mathrm{e}^{-\alpha t}y = C \ (\text{定数}), \quad \therefore \quad y = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \beta x = C\mathrm{e}^{\alpha t}.$$

- 次に x を求める．

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \beta x = \mathrm{e}^{\beta t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-\beta t}x) = C\mathrm{e}^{\alpha t}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-\beta t}x) = C\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)t},$$

$$\mathrm{e}^{-\beta t}x = \frac{C}{\alpha-\beta}\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)t} + C' \quad (\ C' \ : \ \text{定数}\ ),$$

$$\therefore \quad x(t) = \frac{C}{\alpha-\beta}\mathrm{e}^{\alpha t} + C'\mathrm{e}^{\beta t}.$$

2 階微分方程式の解法

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + bx = 0 \quad (a, b : \text{定数}).$$

- 2 次方程式 $X^2 + aX + b = 0$ の解を α, β とする.
- $\alpha \neq \beta$ ならば，解は次の通り.

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{\alpha t} + C_2\mathrm{e}^{\beta t} \quad (\ C_1, C_2\ :\ \text{任意定数}\ ).$$

$*$ $\alpha = \beta$ の場合は，

$$x(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(C_1 + C_2 t) \quad (\ C_1, C_2\ :\ \text{任意定数}\ ).$$

Contents

1 はじめに

2 微分方程式

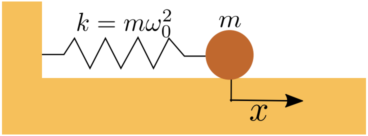
3 オイラーの公式

4 まとめ

5 補遺

オイラーの公式

バネ振り子の運動方程式



$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0 \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right).$$

2 階微分方程式の処方箋に従って解を求める．

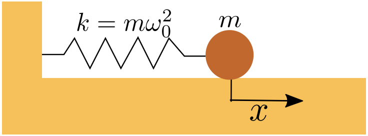
2 次方程式 $X^2 + \omega^2 = 0$ の解は $X = \pm \mathrm{i}\omega$ であるから，

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

バネ振り子の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0 \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right).$$



2 階微分方程式の処方箋に従って解を求める.

2 次方程式 $X^2 + \omega^2 = 0$ の解は $X = \pm \mathrm{i}\omega$ であるから,

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

虚数の指数関数 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega t} = \exp(\pm \mathrm{i}\omega t)$ は何者だ？

$*$ $\exp x = \mathrm{e}^x$ です.

オイラーの公式

虚数の指数関数の正体を探る．

高校物理では，バネ振り子の運動方程式は次の解を持つことがわかっている．

$$x(t) = x_0 \cos \omega t \quad (\ x_0\ :\ \text{定数}\ ). \tag{1}$$

$*$ この解を「数学的に」導出したいならば，「補遺」を参照すること．
概要欄に記した URL にアクセスすれば，この PC スライドが見られますので，
末尾を見てください．

一方，バネ振り子の運動方程式の解として，はじめに次の形のものを得ている．

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{2}$$

したがって，解 (1) は (2) の形で表されるはずである．

$$x_0 \cos \omega t = C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

これを微分して

$$-x_0 \omega \sin \omega t = \mathrm{i}\omega (C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}).$$

オイラーの公式

$$\begin{cases} x_0 \cos\omega t = C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \\ -x_0 \sin\omega t = \mathrm{i}(C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}). \end{cases}$$

$t = 0$ とおいて，

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x_0, \\ C_1 - C_2 = 0, \end{cases} \qquad C_1 = C_2 = \frac{x_0}{2},$$

$$\begin{cases} \cos\omega t = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}), \\ \mathrm{i}\sin\omega t = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}). \end{cases}$$

2 式から $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ を消去して，

オイラーの公式

$$\begin{cases} x_0 \cos \omega t = C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \\ -x_0 \sin \omega t = \mathrm{i}(C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}). \end{cases}$$

$t = 0$ とおいて，

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x_0, \\ C_1 - C_2 = 0, \end{cases} \qquad C_1 = C_2 = \frac{x_0}{2},$$

$$\begin{cases} \cos \omega t = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}), \\ \mathrm{i} \sin \omega t = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}). \end{cases}$$

2 式から $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ を消去して，

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \cos \omega t + \mathrm{i} \sin \omega t$　オイラーの公式.

オイラーの公式

オイラー (Euler) の公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

- 複素数で見ると，指数関数と三角関数は一心同体である．
- フーリエ (Fourier) 解析：振動・波動現象を解析するための数学．
- 複素関数論：複素数の微積分．

オイラーの公式

オイラー (Euler) の公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

- 複素数で見ると，指数関数と三角関数は一心同体である．
- フーリエ (Fourier) 解析：振動・波動現象を解析するための数学．
- 複素関数論：複素数の微積分．

$\theta = \pi$ とおくと，

世界一美しい数式

$$e^{i\pi} = -1.$$

数学で一番基本的な 4 数 $-1, \pi, e, i$ がすべて含まれている．

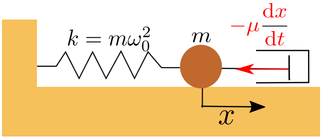
オイラーの公式

空気抵抗を受けるバネ振り子.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

$x = x(t)$ 質点の変位,　m 質量,

k バネ定数,　$\mu > 0$ 定数.



$-\mu\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$　空気抵抗.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0 x = 0 \qquad \left(\alpha = \frac{\mu}{2m},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.\right)$$

空気抵抗は十分弱く，$\alpha < \omega_0^2$ であると仮定する．2 次方程式

$$X^2 + 2\alpha X + \omega_0^2 = 0$$

の解は $X = -\alpha \pm \mathrm{i}\omega \quad (\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha})$.

オイラーの公式

したがって，運動方程式の解は次のようになる．

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \exp[(-\alpha + \mathrm{i}\omega)t] + C_2 \exp[(-\alpha - \mathrm{i}\omega)t] \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha t}(C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}) \end{aligned}$$

オイラーの公式 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega t} = \cos \omega t \pm \mathrm{i} \sin \omega t$ を用いて変形する．

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[C_1(\cos \omega t + \mathrm{i}\sin \omega t) + C_2(\cos \omega t - \mathrm{i}\sin \omega t)\right] \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[(C_1 + C_2)\cos \omega t + \mathrm{i}(C_1 - C_2)\sin \omega t\right]. \end{aligned}$$

$A = C_1 + C_2$, $B = \mathrm{i}(C_1 - C_2)$ とおいて，

オイラーの公式

したがって，運動方程式の解は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
x(t) &= C_1 \exp[(-\alpha + \mathrm{i}\omega)t] + C_2 \exp[(-\alpha - \mathrm{i}\omega)t] \\
&= \mathrm{e}^{-\alpha t}(C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})
\end{aligned}
$$

オイラーの公式 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega t} = \cos\omega t \pm \mathrm{i}\sin\omega t$ を用いて変形する．

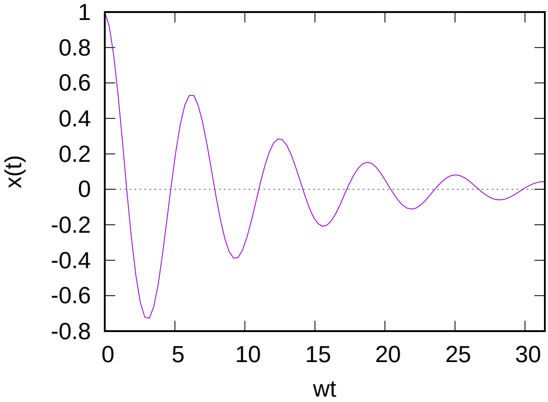
$$
\begin{aligned}
x(t) &= \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[C_1(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t) + C_2(\cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t)\right] \\
&= \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[(C_1 + C_2)\cos\omega t + \mathrm{i}(C_1 - C_2)\sin\omega t\right].
\end{aligned}
$$

$A = C_1 + C_2$, $B = \mathrm{i}(C_1 - C_2)$ とおいて，

空気抵抗を受けるバネ振り子の運動

$$
x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) \quad (\ A,\ B\ :\ \text{定数}\ ).
$$

オイラーの公式



$x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t} \cos \omega t$ のグラフ．

空気抵抗により減衰しながら振動する．

Contents

1 はじめに

2 微分方程式

3 オイラーの公式

4 まとめ

5 補遺

まとめ

- 微分方程式．
  - 自然社会現象の数理モデル．
  - 高校数学の知識で解いてみた．
- オイラーの公式．

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

この動画を高校生のみなさんへ，

- 今回紹介した内容は，大学理工系の数学で最も重要なものの一部です．この動画で大学数学の一端を知って，大学での学業生活に夢をはせるのもいいと思います（とくに受験生のみなさん）．
- この動画で数学は自然社会現象を語る言葉であることをわかってもらえればと思います．

まとめ

- 微分方程式．
  - 自然社会現象の数理モデル．
  - 高校数学の知識で解いてみた．
- オイラーの公式．

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

この動画を高校生のみなさんへ，

- 今回紹介した内容は，大学理工系の数学で最も重要なものの一部です．この動画で大学数学の一端を知って，大学での学業生活に夢をはせるのもいいと思います（とくに受験生のみなさん）．
- この動画で数学は自然社会現象を語る言葉であることをわかってもらえればと思います．

Thank you!

補遺：オイラーの公式

バネ振り子の運動方程式．

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0.$$

高校物理では次の解を持つことを教わる．

$$x(t) = x_0 \cos \omega t \quad (\ \omega\ :\ \text{定数}\ ).$$

この解を「数学的」に求める．それには「エネルギー保存則」を用いる．

エネルギー保存則

$$\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{k}{2}x^2 = E\ (\text{定数}=\text{全エネルギー}).$$

エネルギー保存則はニュートンの運動方程式から導出される．

【導出】

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}x^2} + \omega^2 x = 0,$$

両辺に $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ を掛けて積分すれば，エネルギー保存則を得る．

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega^2 x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \therefore \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = C\ (\text{定数}),$$

補遺：オイラーの公式

エネルギー保存則の式を変形して，

$$x^2 + \left(\frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = C'^2 \text{ (定数)}.$$

点 $\left(x, \frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$ は座標平面内の原点中心，半径 C' の円周上にあるから，

$$\left(x, \frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = C'(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$$

と書ける．

$$\begin{cases} (1) \quad x(t) = C'\cos\theta(t), \\ (2) \quad \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega C'\sin\theta(t). \end{cases}$$

(1) を微分して

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -C'\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\theta(t).$$

(2) と比較して，

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\omega, \quad \theta(t) = -\omega t - \theta_0 \quad (\ \theta_0\ :\ \text{定数}\ ).$$

補遺：オイラーの公式

結局，次の解を得る（$x_0 = C'$ とおいた）.

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \theta_0).$$

とくに $\theta_0 = 0$ とおくと次の解を得る.

$$x(t) = x_0 \cos \omega t.$$

■