Dirac 方程式 (2)
解析力学–幾何学的視点から–(17)

緒方秀教

電気通信大学　情報・ネットワーク工学専攻

August 27, 2022

はじめに

前回までの話

物理量は座標の取り方に依存しない．

動画シリーズ「解析力学〜幾何学的視点から〜」のテーマ．

- 物理量はスカラー，ベクトル，テンソル，. . . である．
- Dirac 方程式：特殊相対論における量子力学方程式．

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\mathrm{i}\hbar c\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\psi + mc^2\beta\psi.$$

  - $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3), \beta$ は 4 × 4 行列．
  - 波動関数 ψ は 4 成分量：正エネルギー解＋負エネルギー解（2 成分ずつ）

今回の予定

- Dirac 方程式は Lorentz 変換（特殊相対論の座標変換）で不変である．

$$\Downarrow$$

（新しい変換量）波動関数は (Dirac) スピノルである．

Contents

Contents

Dirac 方程式の Lorentz 変換における不変性

Dirac 方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\hbar c\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\psi + mc^2\beta\psi, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3), \quad \beta = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \quad (\ I_2 :\ 2\text{ 次単位行列 }),$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Pauli 行列.}$$

Dirac 方程式が Lorentz 変換に対してどのように変換するか調べる．
そのために，Dirac 方程式を扱いやすい形に書き直す．
(1) 両辺に左から β を掛ける．

Dirac 方程式の Lorentz 変換における不変性

Dirac 方程式

$$\left(\mathrm{i}\gamma^\mu \hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right) \psi(x) = 0,$$

- Gamma 行列 $(\gamma^\mu) = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$.

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \beta\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \ (\, i = 1, 2, 3\,),$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Pauli 行列.}$$

- Gamma 行列の反交換関係.

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu},$$

$$\eta^{\mu\nu} := \begin{cases} 1 & (\, \mu = \nu = 0\,), \\ -1 & (\, \mu = \nu = 1, 2, 3\,), \\ 0 & (\, \mu \neq \nu\,). \end{cases}$$

$\ast$ $(\eta^{\mu\nu})$ は今までと符号が反転している． 素粒子物理学ではこの流儀らしい．

Dirac 方程式の Lorentz 変換における不変性

Dirac 方程式は Lorentz 変換で不変であってほしい．

$$\text{Dirac 方程式} \qquad \left(\mathrm{i}\gamma^\mu \hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right) \psi(x) = 0.$$

Lorentz 変換 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ を施す．

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \eta^{\alpha\beta} \Lambda^\nu{}_\beta = \eta^{\mu\nu}.$$

このとき，波動関数（4 成分量）$\psi(x)$ は線型に変換するとする：

$$\psi'(x') = \mathrm{S}(\Lambda)\psi(x) \quad (\ \mathrm{S}(\Lambda):\ 4 \times 4\ \text{行列}\ ).$$

Dirac 方程式が Lorentz 変換で不変になるように，変換行列 $\mathrm{S}(\Lambda)$ を定める．

Dirac 方程式の Lorentz 変換における不変性

Dirac 方程式 $\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right)\psi(x) = 0.$

Lorentz 変換 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x).$

$$\Downarrow$$

$$\left(i\hbar\Lambda^\nu{}_\mu\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - mc\right) S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = 0.$$

左から $S(\Lambda)$ を掛けて，

$$\left(i\hbar\Lambda^\nu{}_\mu S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - mc\right)\psi(x) = 0.$$

変換後も Dirac 方程式が成り立ってほしいから，

$$\Lambda^\nu{}_\mu S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = \gamma^\nu,$$

$$\therefore \quad S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu\gamma^\mu.$$

Dirac 方程式の Lorentz 変換における不変性

Dirac 方程式の解 ψ の変換則

Lorentz 変換 $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ に対し，

$$\psi(x) \;\to\; \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x), \tag{2}$$

$S(\Lambda)$ は次を満たす 4×4 行列である．

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu. \tag{3}$$

- Dirac スピノル：Lorentz 変換に対し変換則 (2) に従う物理量．
  $S(\Lambda)$ は変換則 (3) に従う．
- Dirac 方程式が Lorentz 変換で不変であるためには，
  波動関数 $\psi(x)$ は (Dirac) スピノルでなければならない．

これから，(3) を満たす $S(\Lambda)$ を具体的に求める．

Contents

スピノルとその変換則

波動関数（Dirac 方程式の解）$\psi(x)$ は (Dirac) スピノルである，
i.e., Lorentz 変換 Λ に対し次の変換規則に従う．

$$\psi(x) \to \psi'(x') = \mathsf{S}(\Lambda)\psi(x).$$

$\mathsf{S}(\Lambda)$ は次を満たす 4×4 行列：

$$\mathsf{S}^{-1}(\Lambda)\gamma^{\nu}\mathsf{S}(\Lambda) = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\gamma^{\mu}. \tag{4}$$

今から (4) に従う $\mathsf{S}(\Lambda)$ の具体形を求めて，スピノルの変換則を求める．

スピノルとその変換則

スピノルの変換則

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x), \quad S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu. \tag{5}$$

まず，無限小 Lorentz 変換の場合について調べる．

$$\Lambda^\nu{}_\mu = \delta^\nu{}_\mu + \Delta\omega^\nu{}_\mu, \quad \Delta\omega^\nu{}_\mu \approx 0.$$

$\Lambda^\mu{}_\alpha \eta^{\alpha\beta} \Lambda^\nu{}_\beta = \eta^{\mu\nu}$ から $\Delta\omega^{\mu\nu} := \Delta\omega^\mu{}_\rho \eta^{\rho\nu}$ は反対称である．

$$\Delta\omega^{\mu\nu} = -\Delta\omega^{\nu\mu}.$$

$S(\Lambda)$ を次のようにおく．

$$S(\Lambda) = I - \frac{\mathrm{i}}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}, \quad \sigma_{\mu\nu} : \ 4 \times 4 \text{ 行列，} \mu, \nu \text{ について反対称.}$$

これを (5) 第 2 式に代入して次を得る．

$$\Delta\omega^\nu{}_\mu \gamma^\mu = \frac{\mathrm{i}}{4}\Delta\omega^{\alpha\beta}[\sigma_{\alpha\beta}, \gamma^\nu].$$

スピノルとその変換則

スピノルの変換則

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x), \quad S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}S(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}. \tag{5}$$

まず，無限小 Lorentz 変換の場合について調べる．

$$\Lambda^{\nu}{}_{\mu} = \delta^{\nu}{}_{\mu} + \Delta\omega^{\nu}{}_{\mu}, \quad \Delta\omega^{\nu}{}_{\mu} \approx 0.$$

$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\eta^{\alpha\beta}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = \eta^{\mu\nu}$ から $\Delta\omega^{\mu\nu} := \Delta\omega^{\mu}{}_{\rho}\eta^{\rho\nu}$ は反対称である．

$$\Delta\omega^{\mu\nu} = -\Delta\omega^{\nu\mu}.$$

$S(\Lambda)$ を次のようにおく．

$$S(\Lambda) = I - \frac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}, \quad \sigma_{\mu\nu} : 4 \times 4 \text{ 行列，} \mu, \nu \text{ について反対称.}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta}] = \frac{i}{2}(\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta} - \gamma_{\beta}\gamma_{\alpha}).$$

スピノルとその変換則

有限な大きさの Lorentz 変換．．．．無限小 Lorentz 変換の積み重ね．

$\Lambda = (\Lambda^{\mu}{}_{\nu})$， $\omega = (\omega^{\mu}{}_{\nu})$ とおくと，

$$\Lambda = \lim_{N\to\infty}\left(I + \frac{\omega}{N}\right)^{N} = \exp\omega.$$

$$\Downarrow$$

$$S(\Lambda) = \lim_{N\to\infty}\left(I - \frac{\mathrm{i}}{4}\frac{\omega^{\mu\nu}}{N}\sigma_{\mu\nu}\right)^{N} = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right).$$

$*$ 本義 Lorentz 変換：
無限小 Lorentz 変換の積み重ねで得られる Lorentz 変換
（恒等変換からの連続的変形で得られる Lorentz 変換）．

スピノルとその変換則

Lorentz 変換と Dirac スピノルの変換則

- （本義）Lorentz 変換 Λ

$$\Lambda = \exp\omega, \quad \omega = (\omega^{\mu}{}_{\nu}), \quad \omega^{\mu\nu} = \omega^{\mu}{}_{\rho}\eta^{\eta\nu} = -\omega^{\nu\mu}.$$

- Dirac スピノル（波動関数）$\psi(x)$ の変換

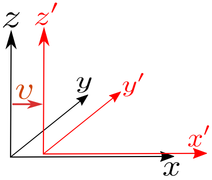
$$\psi(x) \to \psi'(x') = \mathrm{S}(\Lambda)\psi(x),$$
$$\mathrm{S}(\Lambda) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right), \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu].$$

$$\sigma_{i0} = -\sigma_{0i} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (\, i = 1, 2, 3 \,),$$
$$\sigma_{12} = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}, \; \sigma_{23} = \begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix}, \; \sigma_{31} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

スピノルとその変換則

$S(\Lambda)$ の具体形を求める．

【例】$x = x^1$ 方向の Lorentz boost



微小な Lorentz boost $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu$.

$$x' = x^1 - \Delta\phi\, x^0 = x - vt, \quad \Delta\phi = v/c \ll 1.$$

$$\Delta\omega^1{}_0 = -\Delta\phi, \quad \Delta\omega^{10} = -\Delta\omega^{01} = -\Delta\phi, \quad \text{その他の } \Delta\omega^{\mu\nu} = 0.$$

$$\Delta\omega = (\Delta\omega^\mu{}_\nu) = -\Delta\phi \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

スピノルとその変換則

x 方向の Lorentz boost $\Lambda = \exp\omega$.

$$\omega = (\omega^{\mu}{}_{\nu}) = -\phi \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\Lambda = \exp\omega &= I_4 - \phi \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \frac{\phi^2}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}^2 - \cdots \\
&= I_4 + \underbrace{\left(\frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} + \cdots \right)}_{\cosh\phi - 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad - \underbrace{\left(\phi + \frac{\phi^3}{3!} + \cdots \right)}_{\sinh\phi} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

スピノルとその変換則

x 方向の Lorentz boost $\Lambda = \exp\omega$.

$$\omega = (\omega^{\mu}{}_{\nu}) = -\phi \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \exp\omega = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi & & \\ -\sinh\phi & \cosh\phi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \left(\phi = \operatorname{arctanh}\frac{v}{c}\right).$$

スピノルとその変換則

x^1 方向の Lorentz boost Λ に対し $S(\Lambda)$ を求める.

$$S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right), \quad (\omega^{\mu\nu}) = -\phi \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\omega^{10}\sigma_{10} = -\frac{\phi}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right) &= I_4 - \frac{\phi}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \cdots \\ &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^2 + \cdots\right)}_{\cosh(\phi/2)} I_4 \\ &\quad - \underbrace{\left(\frac{\phi}{2} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^3 + \cdots\right)}_{\sinh(\phi/2)} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

スピノルとその変換則

x^1 方向の Lorentz boost Λ に対し $\mathsf{S}(\Lambda)$ を求める．

$$\mathsf{S}(\Lambda) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right), \quad (\omega^{\mu\nu}) = -\phi \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathsf{S}(\Lambda) = \begin{pmatrix} \cosh(\phi/2) & & & -\sinh(\phi/2) \\ & \cosh(\phi/2) & -\sinh(\phi/2) & \\ & -\sinh(\phi/2) & \cosh(\phi/2) & \\ -\sinh(\phi/2) & & & \cosh(\phi/2) \end{pmatrix}.$$

スピノルとその変換則

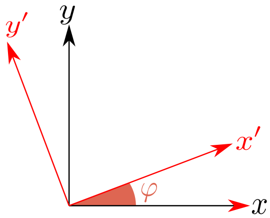
- $y = x^2$ 方向の Lorentz boost

$$
\mathrm{S}(\Lambda) = \begin{pmatrix} \cosh(\phi/2) & & & \mathrm{i}\sinh(\phi/2) \\ & \cosh(\phi/2) & -\mathrm{i}\sinh(\phi/2) & \\ & \mathrm{i}\sinh(\phi/2) & \cosh(\phi/2) & \\ -\mathrm{i}\sinh(\phi/2) & & & \cosh(\phi/2) \end{pmatrix}.
$$

- $z = x^3$ 方向の Lorentz boost

$$
\mathrm{S}(\Lambda) = \begin{pmatrix} \cosh(\phi/2) & & \sinh(\phi/2) & \\ & \cosh(\phi/2) & & -\sinh(\phi/2) \\ \sinh(\phi/2) & & \cosh(\phi/2) & \\ & -\sinh(\phi/2) & & \cosh(\phi/2) \end{pmatrix}.
$$

【例】$z = x^3$ 軸周りの空間回転



$$\Lambda = \exp\omega = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\varphi & \sin\varphi & \\ & -\sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \exp\left[\underbrace{\varphi\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & -1 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{\omega}\right].$$

$$\omega^{12} = -\omega^{21} = -\varphi, \quad \text{その他の } \omega^{\mu\nu} = 0.$$

スピノルとその変換則

【例】z 軸周りの空間回転（続）.

$$\omega^{12} = -\omega^{21} = -\varphi, \quad \text{その他の } \omega^{\mu\nu} = 0.$$

$$S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right) = \exp\left[\frac{i}{2}\varphi\begin{pmatrix}\sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3\end{pmatrix}\right],$$

$$\therefore \quad S(\Lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & & & \\ & e^{-i\varphi/2} & & \\ & & e^{i\varphi/2} & \\ & & & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}.$$

スピノルとその変換則

- x 軸周りの回転

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} \cos\varphi/2 & i\sin\varphi/2 & & \\ i\sin\varphi/2 & \cos\varphi/2 & & \\ & & \cos\varphi/2 & i\sin\varphi/2 \\ & & i\sin\varphi/2 & \cos\varphi/2 \end{pmatrix}.$$

- y 軸周りの回転

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} \cos\varphi/2 & \sin\varphi/2 & & \\ -\sin\varphi/2 & \cos\varphi/2 & & \\ & & \cos\varphi/2 & \sin\varphi/2 \\ & & -\sin\varphi/2 & \cos\varphi/2 \end{pmatrix}.$$

スピノルとその変換則

スピノルは 1 回転すると符号が反転する．

z 軸周りの空間回転に対するスピノル（波動関数）の変換則．

$$\psi(x) \to \psi'(x') = \mathrm{S}(\Lambda)\psi(x),$$

$$\mathrm{S}(\Lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & & & \\ & e^{-i\varphi/2} & & \\ & & e^{i\varphi/2} & \\ & & & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}.$$

スピノルとその変換則

スピノルは 1 回転すると符号が反転する．

z 軸周りの空間回転に対するスピノル（波動関数）の変換則.

$$\psi(x) \to \psi'(x') = \mathrm{S}(\Lambda)\psi(x),$$

$$\mathrm{S}(\Lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & & & \\ & e^{-i\varphi/2} & & \\ & & e^{i\varphi/2} & \\ & & & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}.$$

- 1 回転 ($\varphi = 2\pi$)：波動関数の符号が反転する：$\psi \to -\psi$.
- 2 回転 ($\varphi = 4\pi$)：波動関数がもとに戻る．

スピノルとその変換則

Dirac 方程式は次の変換に対しても不変である．

- 空間反転：$(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$.
- 時間反転：$(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = (-x^0, x^1, x^2, x^3)$.

  空間反転・時間反転は本義 Lorentz 変換でない．

- 荷電共役変換：正エネルギーの電子 $\leftrightarrow$ 負エネルギーの陽電子．

$$\psi^{\mathrm{C}}(x) := \mathrm{C}\gamma^0\psi^*(x), \quad \mathrm{C} = \mathrm{i}\gamma^2\gamma^0.$$

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \psi^C = \begin{bmatrix} \psi_4^* \\ -\psi_3^* \\ -\psi_2^* \\ \psi_1^* \end{bmatrix}.$$

Contents

- 本義 Lorentz 変換.

$$\Lambda = \exp \omega, \quad \omega = (\omega^{\mu}{}_{\nu}), \quad \omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}.$$

- 本義 Lorentz 変換.

$$\Lambda = \exp\omega, \quad \omega = (\omega^{\mu}{}_{\nu}), \quad \omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}.$$

Lie 群と Lie 代数

- Lie 群 G：元が連続変数でパラメータづけされているような（行列）群.
- G の Lie 代数（Lie 環）$\mathfrak{g}$.

$$\mathfrak{g} := \{\, \omega \mid \exp(a\omega) \in G \ (\ \forall a \in \mathbb{R}\ )\,\}\,.$$

- $\mathfrak{g}$ は "g" の「ドイツ文字」. Lie 代数はドイツ文字で書くことが多い.
- 手書きの仕方は「フラクトゥール」などで検索して調べられる.

Lie 群と Lie 代数

G：本義 Lorentz 変換全体からなる群（Lie 群）.

$$G = \{ \exp \omega \mid \omega = (\omega^{\mu}{}_{\nu}),\ \omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu} \} .$$

$\Rightarrow$ G の Lie 代数.

$$\mathfrak{g} = \{ \omega = (\omega^{\nu}{}_{\nu}) \mid \omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu} \} .$$

Lie 群と Lie 代数

G：本義 Lorentz 変換全体からなる群（Lie 群）.

$$G = \{\, \exp\omega \mid \omega = (\omega^{\mu}{}_{\nu}),\ \omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu} \,\}\,.$$

$\Rightarrow$ G の Lie 代数.

$$\mathfrak{g} = \{\, \omega = (\omega^{\nu}{}_{\nu}) \mid \omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu} \,\}\,.$$

$\omega \in \mathfrak{g}$ は次のように展開される.

$$\begin{aligned}\omega = \omega^{0}{}_{1} &\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} + \omega^{0}{}_{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & \\ 1 & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} + \omega^{0}{}_{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \\ &+ \omega^{2}{}_{3} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{bmatrix} + \omega^{3}{}_{1} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 0 & -1 \\ & 0 & & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \omega^{1}{}_{2} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & -1 & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は 6 次元（実）線型空間である.

Lie 群と Lie 代数

一般に Lie 群 G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は（実）線型空間である．

- $\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{g} \Rightarrow \omega_1 + \omega_2 \in \mathfrak{g}$.

$$\because \quad \exp(\omega_1 + \omega_2) = \lim_{N\to\infty} \left(\exp\frac{\omega_1}{N}\exp\frac{\omega_2}{N}\right)^N \in G \quad \text{（Trotter の公式）}.$$

- $\omega \in \mathfrak{g},\ a \in \mathbb{R} \Rightarrow a\omega \in \mathfrak{g}$ は自明．

さらに，

$$\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad \text{交換子積 } [\omega_1, \omega_2] := \omega_1\omega_2 - \omega_2\omega_1 \in \mathfrak{g}.$$

$$\begin{aligned} \because \quad & \exp([\omega_1, \omega_2]) \\ = & \lim_{N\to\infty} \left[\exp\left(\frac{\omega_1}{N^2}\right)\exp\left(\frac{\omega_2}{N^2}\right)\exp\left(-\frac{\omega_1}{N^2}\right)\exp\left(-\frac{\omega_2}{N^2}\right)\right]^{N^2} \in G. \end{aligned}$$

Contents

Dirac 共役

$$\overline{\psi}(x) := \psi(x)^{\dagger}\gamma_0 = \psi(x)^{\dagger}\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}.$$

- Dirac 共役の Lorentz 変換に対する変換則.

$$\gamma_0\sigma_{\mu\nu}^{\dagger}\gamma_0 = \sigma_{\mu\nu}$$

を用いて，

$$\begin{aligned}
\gamma_0 S(\Lambda)^{\dagger}\gamma_0 &= \gamma_0\left[\exp\left(-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)\right]^{\dagger}\gamma_0 = \exp\left(\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\gamma_0\sigma_{\mu\nu}^{\dagger}\gamma_0\right) \\
&= \exp\left(\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right) = S^{-1}(\Lambda), \\
\overline{\psi'}(x') &= \psi'(x')^{\dagger}\gamma_0 = \psi(x)^{\dagger}S(\Lambda)^{\dagger}\gamma_0 = \psi(x)^{\dagger}(\gamma_0)^2 S(\Lambda)^{\dagger}\gamma_0 \\
&= \psi(x)^{\dagger}\gamma_0 S^{-1}(\Lambda) = \overline{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda).
\end{aligned}$$

Dirac 共役と確率密度

Dirac 共役

$$\overline{\psi}(x) := \psi(x)^\dagger \gamma_0 = \psi(x)^\dagger \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}.$$

- Dirac 共役の Lorentz 変換に対する変換則

$$\overline{\psi}(x) \to \overline{\psi'}(x') = \overline{\psi}(x) S^{-1}(\Lambda).$$

- $\overline{\psi}\psi$ はスカラーである.

$$\overline{\psi}'(x')\psi'(x') = \overline{\psi}(x)\psi(x).$$

Dirac 共役と確率密度

確率密度 $\psi^\dagger\psi$，確率密度流 $\boldsymbol{j} = c\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi$.

$$\rightarrow \quad 4\ \text{元確率密度流} \quad j^\mu := c\bar{\psi}\gamma^\mu\psi.$$

確率密度流 (j^μ) は反変ベクトルである．

【証明】Lorentz 変換に対する j^μ の変換則を調べる．

$$\begin{aligned} j'' &= c\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') \\ &= c\bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) \\ &= c\Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x) \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu, \end{aligned}$$

$$\therefore \quad j'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu.$$

$*$ $S(\Lambda)$ は次を満たすよう定められたことを思い出す．

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu.$$

Contents

まとめ

- Dirac 方程式
$$(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc)\psi(x) = 0.$$
Lorentz 変換に対して不変．
$\Rightarrow$ $\psi(x)$ は (Dirac) スピノルの変換則に従う．
- スピノルの変換則．
1 回転するとスピノルは符号が反転する．
- Lie 群 G と Lie 代数 $\mathfrak{g}$．
$$\mathfrak{g} = \{\, \omega \in G \mid \exp(a\omega) \in G \ (\,\forall a \in \mathbb{R}\,)\, \}.$$
$\mathfrak{g}$ は線型空間，交換子積で閉じている．
- Dirac 共役：スピノルの “双対”．