電磁場と可換ゲージ理論
解析力学～幾何学的視点から～(18)

緒方秀教

電気通信大学

2022 年 9 月 20 日（火）

はじめに

電磁場の源は「ゲージ変換」に対する不変性である．

波動関数の局所的ゲージ変換 $\psi \to e^{i\theta(x)}\psi$ に対する不変性．

$\longrightarrow$ 時空間はある意味曲がった空間になる．

- 電磁場のポテンシャル $A_\mu(x)$ ＝可換ゲージ場：時空間の曲がりを記述する．
- 電磁場 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$：時空間の曲率．
- Aharonov-Bohm 効果（AB 効果）．
- 電磁場の Lagrangian $\longrightarrow$ Maxwell 方程式．

Contents

Contents

ゲージ変換

Dirac 方程式：特殊相対論的量子力学の基礎方程式．

$*$ 動画「Dirac 方程式 (1,2)」参照

Dirac 方程式を与える作用積分

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}, \quad \mathscr{L} = \mathrm{i}\hbar c\,\overline{\psi}(x)\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - mc^2 \overline{\psi}(x)\psi(x).$$

$\psi, \overline{\psi}$ について変分をとる．

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4 x \left[\mathrm{i}\hbar c \left(\delta\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu(\delta\psi)\right) - mc^2(\delta\overline{\psi}\psi + \overline{\psi}\delta\psi)\right]$$

（青字の項について部分積分を行うと，無限遠で $\delta\psi = 0$ より）

$$= \int \mathrm{d}^4 x \left[\delta\overline{\psi}(\mathrm{i}\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\psi) + (\mathrm{i}\hbar c\partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu - mc^2\overline{\psi})\delta\psi\right]$$

$$= 0.$$

$$\Downarrow$$

Dirac 方程式　$\mathrm{i}\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0.$

ゲージ変換

Lagrangian 密度

$$\mathscr{L} = \mathrm{i}\hbar c\,\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) - mc^{2}\overline{\psi}(x)\psi(x).$$

- $\mathscr{L}$ は次の大域的ゲージ変換に対して不変である．

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\psi(x) \quad (\,\theta_0 :\ \mathrm{const.}\,).$$

全時空で一斉に同じ角度の位相回転．
物理現象は光速度より速く伝搬しないから，不可能．

- では，次の局所的ゲージ変換に対してはどうか？

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}\psi(x).$$

ゲージ変換

Lagrangian 密度

$$\mathscr{L} = \mathrm{i}\hbar c\,\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - mc^2\overline{\psi}(x)\psi(x).$$

- $\mathscr{L}$ は次の大域的ゲージ変換に対して不変である．

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\psi(x) \quad (\ \theta_0\ :\ \text{const.}\ ).$$

- では，次の局所的ゲージ変換に対してはどうか？

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}\psi(x).$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}' &= \mathrm{i}\hbar c\,\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - mc^2\overline{\psi}'\psi' \\ &= \mathrm{i}\hbar c\,\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi + \mathrm{i}\partial_\mu\theta\cdot\psi) - mc^2\overline{\psi}\psi \\ &= \mathscr{L} - \hbar c\,\partial_\mu\theta\cdot\overline{\psi}\gamma^\mu\psi \neq \mathscr{L}.\end{aligned}$$

$\mathscr{L}$ は局所的ゲージ変換に対して不変ではない．

ゲージ変換

Lagrangian 密度 $\mathscr{L}$ において，微分 ∂_μ を共変微分に置き換えてみる．

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \mathrm{i}\hbar c\,\overline{\psi}\gamma^\mu \mathrm{D}_\mu \psi - mc^2\overline{\psi}\psi \\ &= \mathrm{i}\hbar c\,\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}A_\mu(x))\psi - mc^2\overline{\psi}\psi.\end{aligned}$$

局所的ゲージ変換 $\psi \to \psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}\psi$ を施すと，
（変換に伴い，$A_\mu(x) \to A'_\mu(x)$ となるとする）

$$\begin{aligned}\mathscr{L}' &= \mathrm{i}\hbar c\,\overline{\psi}'\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}A'_\mu(x))\psi' - mc^2\overline{\psi}'\psi' \\ &= \mathrm{i}\hbar c\,\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}(\partial_\mu\theta + A'_\mu(x))\psi) - mc^2\overline{\psi}\psi.\end{aligned}$$

$A_\mu(x)$ が局所的ゲージ変換に伴い

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x)$$

と変換するなら，Lagrangian 密度は不変となる．

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L}.$$

ゲージ変換

今導入した量 $A_\mu(x)$ を $(q/\hbar)A_\mu(x)$（q は電荷）と記すことにする．
新しい作用 (Lagrangian)

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L},$$

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \mathrm{i}\hbar c \overline{\psi} \gamma^\mu \mathrm{D}_\mu \psi - mc^2 \overline{\psi}\psi, \\ &= \mathrm{i}\hbar c \overline{\psi} \gamma^\mu \left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{q}{\hbar} A_\mu(x) \right) \psi - mc^2 \overline{\psi}\psi. \end{aligned}$$

局所的ゲージ変換

$$\psi \to \psi' = \exp\left(\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\chi(x) \right) \psi,$$

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \chi(x).$$

Lagrangian$\mathscr{L}$ は局所的ゲージ変換に対して不変である．

ゲージ変換

新しい作用 (Lagrangian)

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}, \quad \mathscr{L} = \mathrm{i}\hbar c \overline{\psi}\gamma^\mu \mathrm{D}_\mu \psi - mc^2 \overline{\psi}\psi,$$

$$\mathrm{D}_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}A_\mu(x).$$

Hamilton の原理 $\delta S = 0 \longrightarrow$ 波動関数 ψ に対する運動方程式.

$$\mathrm{i}\hbar\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}A_\mu(x)\right)\psi - mc\psi = 0.$$

- 電磁場中の荷電粒子に対する Dirac 方程式.
- $A_\mu(x)$：4 元電磁場ポテンシャル. $(A_\mu(x)) = (\Phi/c, -\boldsymbol{A})$.

【非相対論的極限】Pauli 方程式（動画「Dirac 方程式 (1)」参照).

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla - \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\boldsymbol{A}(x)\right)^2\varphi - \frac{q\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\varphi + q\Phi(x)\varphi.$$

（注意） $(A_1, A_2, A_3) = -\boldsymbol{A}$.

ゲージ変換

新しい作用 (Lagrangian)

$$S = \int \mathrm{d}^4x \mathscr{L}, \quad \mathscr{L} = \mathrm{i}\hbar c \overline{\psi}\gamma^\mu \mathrm{D}_\mu \psi - mc^2 \overline{\psi}\psi,$$

$$\mathrm{D}_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}A_\mu(x).$$

Hamilton の原理 $\delta S = 0 \longrightarrow$ 波動関数 ψ に対する運動方程式.

$$\mathrm{i}\hbar\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}A_\mu(x)\right)\psi - mc\psi = 0.$$

- 電磁場中の荷電粒子に対する Dirac 方程式.
- $A_\mu(x)$：4 元電磁場ポテンシャル. $(A_\mu(x)) = (\Phi/c, -\boldsymbol{A})$.

局所ゲージ変換に対する不変性を要請すると，時空間に電磁場ポテンシャル $A_\mu(x)$ が存在しなければならない.

ゲージ変換

【まとめ】荷電粒子に対する Lagrangian.

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}, \quad \mathscr{L} = \mathrm{i}\hbar c \overline{\psi} \gamma^{\mu} \left(\partial_{\mu} + \mathrm{i}\frac{q}{\hbar} A_{\mu}(x) \right) \psi - mc^2 \overline{\psi} \psi .$$

$\mathscr{L}$ は次の局所的ゲージ変換で不変である.

$$\psi \to \psi' = \exp\left(\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\chi(x) \right) \psi,$$

$$A_{\mu}(x) \to A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) - \partial_{\mu}\chi(x).$$

- $\delta S = 0 \to$ 荷電粒子に対する Dirac 方程式.
- $A_{\mu}(x)$：可換ゲージ場＝電磁場ポテンシャル.

∗ 電磁気学におけるゲージ変換則.

$$\Phi(x) \to \Phi'(x) = \Phi(x) - \frac{\partial \chi(x)}{\partial t},$$

$$\boldsymbol{A}(x) \to \boldsymbol{A}'(x) = \boldsymbol{A}(x) + \nabla \chi(x).$$

Contents

電磁場は曲がった空間

これから，可換ゲージ場に対する幾何学的解釈を試みる．

∗ 動画「Riemann 幾何学 (1)」参照．

- 電磁場中の荷電粒子（電荷 q）に対する Dirac 方程式．

$$\mathrm{i}\hbar\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}+\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}A_{\mu}(x)\right)\psi-mc\psi=0.$$

- 物理系の局所的ゲージ変換に対する不変性のためには，

$$D_{\mu}:=\partial_{\mu}+\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}A_{\mu}(x)$$

を正統な微分作用素とみなすのが妥当である．

電磁場は曲がった空間

これから，可換ゲージ場に対する幾何学的解釈を試みる．

∗ 動画「Riemann 幾何学 (1)」参照．

- 電磁場中の荷電粒子（電荷 q）に対する Dirac 方程式．

$$\mathrm{i}\hbar\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}+\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}A_{\mu}(x)\right)\psi-mc\psi=0.$$

- 物理系の局所的ゲージ変換に対する不変性のためには，

$$D_{\mu}:=\partial_{\mu}+\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}A_{\mu}(x)$$

を正統な微分作用素とみなすのが妥当である．

微分作用素 D_{μ} は微分幾何でいう共変微分である．

電磁場は曲がった空間

微分幾何学的な平行移動の概念を導入する．

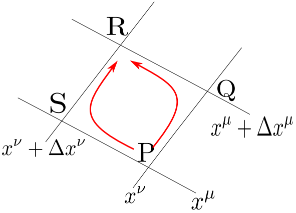
$$
\begin{aligned}
& \psi(x) \text{ は } x^\mu \text{ 軸に沿って平行移動される．} \\
\iff \quad & D_\mu \psi(x) = \partial_\mu \psi(x) + \mathrm{i}\frac{q}{\hbar} A_\mu(x)\psi(x) = 0. \\
\iff \quad & \psi(x^\mu + \Delta x^\mu) \underbrace{- \psi(x^\mu) + \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Delta x^\mu A_\mu(x)\psi(x)}_{\text{右辺に移項する}} = 0.
\end{aligned}
$$

$\psi(x)$ の x^μ 軸に沿っての平行移動

$$
\psi_{\parallel}(x^\mu + \Delta x^\mu) := \psi(x^\mu) - \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Delta x^\mu A_\mu(x)\psi(x).
$$

電磁場は曲がった空間

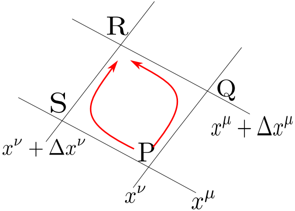
$\psi(x)$ を二つの経路 P → Q → R, P → S → R に沿って平行移動させて，その差を取る．



$$
\begin{aligned}
&\psi_{\mathrm{PQR}\parallel}(x^\mu + \Delta x^\mu, x^\nu + \Delta x^\nu) \\
&= {\color{blue}\psi_{\mathrm{PQ}\parallel}(x^\mu + \Delta x^\mu, x^\nu)} \\
&\quad - \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Delta x^\nu A_\nu(x^\mu + \Delta x^\mu, x^\nu) \\
&\qquad \times {\color{blue}\psi_{\mathrm{PQ}\parallel}(x^\mu + \Delta x^\mu, x^\nu)} \\
&= \psi(x) - \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Delta x^\mu A_\mu(x)\psi(x) \\
&\quad - \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Delta x^\nu (A_\nu(x) + \Delta x^\mu \partial_\mu A_\nu(x)) \\
&\qquad \times \left(\psi(x) - \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Delta x^\mu A_\mu(x)\psi(x)\right)
\end{aligned}
$$

電磁場は曲がった空間

$\psi(x)$ を二つの経路 P $\to$ Q $\to$ R, P $\to$ S $\to$ R に沿って平行移動させて，その差を取る．



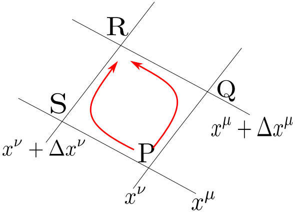
$$\begin{aligned}
\psi_{\mathrm{PQR}\parallel} &= \psi(x) - \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}(\Delta x^\mu A_\mu(x) + \Delta x^\nu A_\nu(x))\psi(x) \\
&\quad - \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Delta x^\mu \Delta x^\nu \left[\partial_\mu A_\nu(x) - \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}A_\nu(x)A_\mu(x)\right]\psi(x), \\
\psi_{\mathrm{PSR}\parallel} &= \psi(x) - \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}(\Delta x^\mu A_\mu(x) + \Delta x^\nu A_\nu(x))\psi(x) \\
&\quad - \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Delta x^\mu \Delta x^\nu \left[\partial_\nu A_\mu(x) - \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}A_\mu(x)A_\nu(x)\right]\psi(x).
\end{aligned}$$

電磁場は曲がった空間

$\psi(x)$ を二つの経路 P → Q → R, P → S → R に沿って平行移動させて，その差を取る．

$$\psi_{\mathrm{PSR}\parallel} - \psi_{\mathrm{PQR}\parallel} = \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu}\underbrace{\left(\partial_{\mu}A_{\nu}(x) - \partial_{\nu}A_{\mu}(x)\right)}_{\text{曲率}}\psi(x).$$

電磁場は曲がった空間



$$\psi_{\mathrm{PSR}\|} - \psi_{\mathrm{PQR}\|} = \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Delta x^\mu \Delta x^\nu F_{\mu\nu}(x)\psi(x),$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$$

$$曲率 = 4\ 元電磁場.$$

- 荷電粒子にとって電磁場のある空間は曲がった空間である.
- 電磁場 $F_{\mu\nu}$ は空間の曲がり具合（曲率）を表す量である.

電磁場は曲がった空間

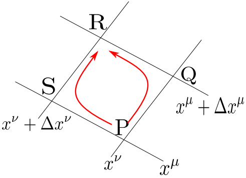
4 元電磁場 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

$$(A_\mu) = \left(\frac{1}{c}\Phi, -\boldsymbol{A}\right),$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\Phi, \quad \boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A},$$

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}.$$

電磁場は曲がった空間

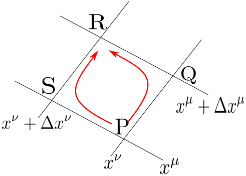


$$\psi_{\mathsf{PSR}\parallel} - \psi_{\mathsf{PQR}\parallel} = \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Delta x^\mu \Delta x^\nu F_{\mu\nu}\psi(x).$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \psi_{\mathsf{PSR}\parallel} &\simeq \left(1 + \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Delta x^\mu \Delta x^\nu F_{\mu\nu}\right)\psi_{\mathsf{PQR}\parallel} \\ &\simeq \exp\left(\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Delta x^\mu \Delta x^\nu F_{\mu\nu}\right)\psi_{\mathsf{PQR}\parallel}. \end{aligned}$$

電磁場は曲がった空間

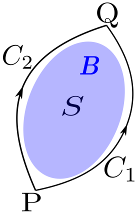


$$\psi_{\mathrm{PSR}\parallel} - \psi_{\mathrm{PQR}\parallel} = \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Delta x^\mu \Delta x^\nu F_{\mu\nu}\psi(x).$$

$$\Downarrow$$

$$\psi_{\mathrm{PSR}\parallel} \simeq \left(1 + \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Delta x^\mu \Delta x^\nu F_{\mu\nu}\right)\psi_{\mathrm{PQR}\parallel}$$

$$\simeq \exp\left(\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Delta x^\mu \Delta x^\nu F_{\mu\nu}\right)\psi_{\mathrm{PQR}\parallel}.$$



Aharanov-Bohm 効果（AB 効果）

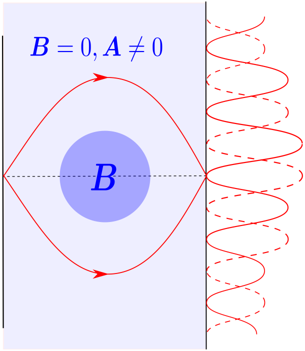
$$\psi_{C_2}(\mathrm{Q}) = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\int_S \mathrm{d}S\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}\right)\psi_{C_1}(\mathrm{Q}).$$

電磁場空間の曲がりが波動関数の位相差に現れる．

電磁場は曲がった空間

AB 効果

- Y. Aharonov & D. Bohm: Phys. Rev., Vol.115 (1959), pp.485–491.
- A. Tonomura（外村彰）, et al.:
  Phys. Rev. Lett., Vol.56 (1986), pp.792–.
- N. Osakabe, et al.: Phys. Rev. A, Vol.34 (1986), pp.815–.



- 位相のずれが電子線の干渉縞により観測される（干渉縞の位置がずれる）.
- 電子は磁場を通らなくても磁場の存在を「感じる」（$\boldsymbol{B}$ より $\boldsymbol{A}$ が本質）.

$$\Delta\theta = -\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\int_S \mathrm{d}S\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B} = -\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}.$$

- 電磁場は空間の「曲がり」を表す.
  その曲がりが波動関数の位相差として現れる.

Contents

ゲージ場の Lagrangian と場の方程式

ゲージ場＝電磁場はどのようにして決まるのだろうか？

荷電粒子& ゲージ場（電磁場）の作用．

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}, \quad \mathscr{L} = \mathscr{L}_\mathrm{M} + \mathscr{L}_\mathrm{G},$$

$$\mathscr{L}_\mathrm{M} = \mathrm{i} c\hbar \overline{\psi} \gamma^\mu \left(\partial_\mu + \mathrm{i} \frac{q}{\hbar} A_\mu \right) \psi - mc^2 \overline{\psi} \psi$$

荷電粒子の Lagrangian,

$\mathscr{L}_\mathrm{G}$　ゲージ場（電磁場）の Lagrangian.

$\mathscr{L}_\mathrm{G}$ を適切に与えれば，場の方程式（Maxwell 方程式）が得られる．

ゲージ場の Lagrangian と場の方程式

- 場の方程式は線型方程式である． $\longrightarrow$ $\mathscr{L}_{\mathrm{G}}$ は $A_\mu, \partial_\mu A_\nu$ の 2 次式である．

  $*$ Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{\mathrm{G}}}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathscr{L}_{\mathrm{G}}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = 0.$$

- $\mathscr{L}_{\mathrm{G}}$ はゲージ変換 $A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi$ で不変である．

  $\longrightarrow$ $\mathscr{L}_{\mathrm{G}}$ は A_μ を含み得ない．

  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ はゲージ変換で不変であるから . . .

$$\mathscr{L}_{\mathrm{G}} = a F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\, a : \ \mathrm{const.}\,).$$

ゲージ場の Lagrangian と場の方程式

荷電粒子& ゲージ場（電磁場）の作用.

$$S = \int \mathrm{d}^4x \mathscr{L},$$

$$\mathscr{L} = \mathrm{i}c\hbar\overline{\psi}\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}A_\mu\right)\psi - mc^2\overline{\psi}\psi + aF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

A_μ について変分を取ると,

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4x \delta A_\nu(-cq\overline{\psi}\gamma^\nu\psi - 4a\partial_\mu F^{\mu\nu}) = 0,$$

$$\therefore \quad -4a\partial_\mu F^{\mu\nu} = cq\overline{\psi}\gamma^\nu\psi = j^\nu \quad \text{（4 元電流密度）}.$$

$a = -1/(4\mu_0)$ とおくと Maxwell 方程式の一部 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$ を得る.

ゲージ場の Lagrangian と場の方程式

荷電粒子& ゲージ場（電磁場）の作用．

$$S = \int \mathrm{d}^4x \mathscr{L},$$

$$\mathscr{L} = \mathrm{i}c\hbar\overline{\psi}\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}A_\mu\right)\psi - mc^2\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

- Hamilton の原理 $\delta S = 0 \to$ Maxwell 方程式 (1)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}.$$

- Maxwell 方程式 (2) （Bianchi の恒等式）. . . これは数学的に自明．

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}\boldsymbol{E}.$$

Contents

まとめ

- 局所的ゲージ変換 $\psi \longrightarrow \exp\left(\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\chi(x)\right)\psi$ に対して物理系は不変である．
  $\longrightarrow$ 電磁場＝可換ゲージ場 $A_\mu(x)$ の存在．
- 電磁場ポテンシャル $A_\mu(x)$ は時空間の曲がりを与える．
  - 共変微分：$D_\mu := \partial_\mu + \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}A_\mu(x).$
  - 電磁場 $F_{\mu\nu}$ ＝曲率．
  - Aharonov-Bohm 効果（AB 効果）
    空間の曲がり（電磁場） $\longrightarrow$ 波動関数の位相差．
- 電磁場＝可換ゲージ場に対する作用 (Lagrangian) $\longrightarrow$ Maxwell 方程式．