非可換ゲージ理論
解析力学～幾何学的視点から～(19)

緒方秀教

電気通信大学

October 21, 2022

はじめに

- これまでの（相対論的）量子力学的粒子：次のゲージ変換で系は不変．

$$\psi \to \exp\left(\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\chi(x)\right)\psi.$$

  - 電磁場＝可換ゲージ場の存在．
  - $\delta S = 0 \to$ Dirac 方程式，Maxwell 方程式．

- 原子核内の陽子・中性子など：どういう相互作用が働くのだろう？
  ゲージ変換の高次元化（非可換ゲージ理論）．

$$\begin{bmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_N\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} {U_1}^1(x) & \cdots & {U_1}^N(x) \\ \vdots & & \vdots \\ {U_N}^1(x) & \cdots & {U_N}^N(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_N\end{bmatrix}.$$

- Yang-Mills，内山龍雄．

Contents

1. はじめに
2. 可換ゲージ理論（電磁場）
3. 非可換ゲージ場
4. Lie 群と Lie 代数
5. ゲージ場の Laplacian と方程式
6. ゲージ理論の歴史
7. まとめ

Contents

1 はじめに

2 可換ゲージ理論（電磁場）

3 非可換ゲージ場

4 Lie 群と Lie 代数

5 ゲージ場の Laplacian と方程式

6 ゲージ理論の歴史

7 まとめ

可換ゲージ理論（電磁場）

荷電粒子& ゲージ場（電磁場）の作用．

$$
\begin{aligned}
S &= \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}, \quad \mathscr{L} = \mathscr{L}_{\mathrm{M}} + \mathscr{L}_{\mathrm{G}}, \\
\mathscr{L}_{\mathrm{M}} &= \mathrm{i} c\hbar \overline{\psi} \gamma^{\mu} \left(\partial_{\mu} + \mathrm{i}\frac{q}{\hbar} A_{\mu} \right) \psi - mc^2 \overline{\psi}\psi, \\
\mathscr{L}_{\mathrm{G}} &= -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.
\end{aligned}
$$

- ψ：波動関数（Dirac スピノル）．
- A_{μ}：4 元電磁ポテンシャル．
- Hamilton の原理 $\delta S = 0 \rightarrow$ Dirac 方程式，Maxwell 方程式．

Contents

1 はじめに

2 可換ゲージ理論（電磁場）

3 非可換ゲージ場

4 Lie 群と Lie 代数

5 ゲージ場の Laplacian と方程式

6 ゲージ理論の歴史

7 まとめ

非可換ゲージ場

波動関数 ψ を多成分ベクトル値関数とする．

$$\psi \to \psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix}, \quad \psi_1, \ldots, \psi_N : \text{ Dirac スピノル},$$

$$\overline{\psi} \to \overline{\psi} = \begin{bmatrix} \overline{\psi}_1 & \ldots & \overline{\psi}_N \end{bmatrix}.$$

ψ で記述される粒子の Lagrangian 密度

$$\mathscr{L}_{\mathrm{M}} = \mathrm{i}\overline{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + \mathrm{i}g\mathrm{A}_{\mu})\psi - m\overline{\psi}\psi,$$

$$\mathrm{A}_{\mu} = \mathrm{A}_{\mu}(x) : \ N \times N \text{ 行列値関数},$$

$$g : \text{ 電荷に相当する量},$$

$$\mathrm{D}_{\mu} = \partial_{\mu} + \mathrm{i}g\mathrm{A}_{\mu} : \text{ 共変微分}.$$

∗ 自然単位系を用いることにする ($c = \hbar = 1$).

非可換ゲージ場

可換ゲージ理論と同様，ここでも $\overline{\psi}\psi$ はスカラーであるとしたい．

- （可換ゲージ理論）局所ゲージ変換 $\psi \to \psi' = \exp(\mathrm{i}\chi(x))\psi$ を考えた．
- （非可換ゲージ理論）次の局所ゲージ変換を考える．

$$\psi \to \psi' = \mathrm{U}(x)\psi, \quad \mathrm{U}(x) = [U_a{}^b(x)] : \ N \times N \text{ 行列.}$$

$\overline{\psi}$ の変換則を求める．$\psi'_a = U_a{}^b(x)\psi_b$ より，

$$\overline{\psi'_a} = (\psi'_a)^\dagger\gamma^0 = (U_a{}^b)^*(x)\psi_b^\dagger\gamma^0 = (\mathrm{U}^\dagger)_b{}^a(x)(\psi^\dagger)^b\gamma^0,$$

$$\therefore \quad \overline{\psi} \to \overline{\psi'} = \overline{\psi}\mathrm{U}^\dagger(x).$$

$\overline{\psi}\psi$ はスカラーであるから（ $\overline{\psi'}\psi' = \overline{\psi}\psi$ ），

$$\mathrm{U}^\dagger(x) = \mathrm{U}^{-1}(x) \quad (\mathrm{U}(x) \text{ はユニタリ行列}).$$

$$\overline{\psi} \to \overline{\psi'} = \overline{\psi}\mathrm{U}^{-1}(x) = \overline{\psi}\mathrm{U}^\dagger(x).$$

非可換ゲージ場

Lagrangian 密度.

$$\mathscr{L}_\mathrm{M} = \mathrm{i}\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}g\mathrm{A}_\mu)\psi - m\overline{\psi}\psi.$$

$\mathscr{L}_\mathrm{M}$ は局所ゲージ変換 $\psi \to \psi' = \mathrm{U}(x)\psi$ で不変であることを要請する.
$\mathrm{A}_\mu(x)$ は $\mathrm{A}_\mu(x) \to \mathrm{A}'_\mu(x)$ と変換するとすると,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}'_\mathrm{M} &= \mathrm{i}\overline{\psi'}\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}g\mathrm{A}'_\mu)\psi' - m\overline{\psi'}\psi' \\
&= \mathrm{i}\overline{\psi}\mathrm{U}^{-1}\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}g\mathrm{A}_\mu)U\psi - m\overline{\psi}\psi \\
&= \mathrm{i}\overline{\psi}\left[\partial_\mu + \mathrm{i}g\mathrm{U}^{-1}\left(\mathrm{A}'_\mu\mathrm{U} - \frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu\mathrm{U}\right)\right]\psi - m\overline{\psi}\psi.
\end{aligned}$$

$\mathscr{L}'_\mathrm{M} = \mathscr{L}_\mathrm{M}$ より 青字部分 $= \mathrm{A}_\mu$ となるから,

A_μ の変換則

$$\mathrm{A}'_\mu(x) = \mathrm{U}(x)\mathrm{A}(x)\mathrm{U}^{-1}(x) + \frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu\mathrm{U}(x)\mathrm{U}^{-1}(x)$$

非可換ゲージ場

Lagrangian 密度．

$$\mathscr{L}_{\mathrm{M}} = \mathrm{i}\overline{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + \mathrm{i}g\mathrm{A}_{\mu})\psi - m\overline{\psi}\psi.$$

$\mathscr{L}_{\mathrm{M}}$ は局所ゲージ変換 $\psi \to \psi' = \mathrm{U}(x)\psi$ で不変であることを要請する．
$\mathrm{A}_{\mu}(x)$ は $\mathrm{A}_{\mu}(x) \to \mathrm{A}'_{\mu}(x)$ と変換するとすると，

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}'_{\mathrm{M}} &= \mathrm{i}\overline{\psi'}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + \mathrm{i}g\mathrm{A}'_{\mu})\psi' - m\overline{\psi'}\psi' \\
&= \mathrm{i}\overline{\psi}\mathrm{U}^{-1}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + \mathrm{i}g\mathrm{A}_{\mu})U\psi - m\overline{\psi}\psi \\
&= \mathrm{i}\overline{\psi}\left[\partial_{\mu} + \mathrm{i}g\mathrm{U}^{-1}\left(\mathrm{A}'_{\mu}\mathrm{U} - \frac{\mathrm{i}}{g}\partial_{\mu}\mathrm{U}\right)\right]\psi - m\overline{\psi}\psi.
\end{aligned}$$

$\mathscr{L}'_{\mathrm{M}} = \mathscr{L}_{\mathrm{M}}$ より 青字部分 $= \mathrm{A}_{\mu}$ となるから，

A_{μ} の変換則

$$\mathrm{A}'_{\mu}(x) = \mathrm{U}(x)\mathrm{A}(x)\mathrm{U}^{-1}(x) - \frac{\mathrm{i}}{g}\mathrm{U}(x)\partial_{\mu}\mathrm{U}^{-1}(x).$$

$$* \quad \partial_{\mu}\mathrm{U}^{-1}(x) = -\mathrm{U}^{-1}(x)\partial_{\mu}\mathrm{U}(x)\mathrm{U}^{-1}(x).$$

非可換ゲージ場

無限小平行移動：$\mathsf{D}_\mu \psi = 0$ を用いて定義する．

$$
\begin{aligned}
& \psi(x) \text{ は } x^\mu \text{ 軸に沿って平行移動される．} \\
\iff \quad & \mathsf{D}_\mu \psi(x) = \partial_\mu \psi(x) + \mathsf{i}g\mathsf{A}_\mu(x)\psi(x) = 0. \\
\iff \quad & \psi(x^\mu + \Delta x^\mu) \underbrace{- \psi(x^\mu) + \mathsf{i}g\Delta x^\mu \mathsf{A}_\mu(x)\psi(x)}_{\text{右辺に移項する}} = 0.
\end{aligned}
$$

$$
* \quad \psi(x^\mu + \Delta x^\mu) = \psi(x^1, \ldots, x^\mu + \Delta x^\mu, \ldots, x^N), \ \text{etc.}
$$

非可換ゲージ場

無限小平行移動：$\mathrm{D}_\mu\psi = 0$ を用いて定義する．

$$\begin{aligned}
&\psi(x) \text{ は } x^\mu \text{ 軸に沿って平行移動される．}\\
\Longleftrightarrow\quad & \mathrm{D}_\mu\psi(x) = \partial_\mu\psi(x) + \mathrm{i}g\mathrm{A}_\mu(x)\psi(x) = 0.\\
\Longleftrightarrow\quad & \psi(x^\mu + \Delta x^\mu)\underbrace{-\psi(x^\mu) + \mathrm{i}g\Delta x^\mu \mathrm{A}_\mu(x)\psi(x)}_{\text{右辺に移項する}} = 0.
\end{aligned}$$

$$* \quad \psi(x^\mu + \Delta x^\mu) = \psi(x^1, \ldots, x^\mu + \Delta x^\mu, \ldots, x^N), \ \text{etc.}$$

$\psi(x)$ の x^μ 軸に沿っての平行移動

$$\psi_\parallel(x^\mu + \Delta x^\mu) := \psi(x^\mu) - \mathrm{i}g\Delta x^\mu \mathrm{A}_\mu(x)\psi(x).$$

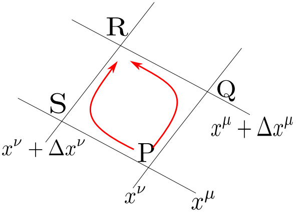
右辺は添字 μ について和をとらない．

共変微分：平行移動して差を取る．

$$\mathrm{D}_\mu\psi(x) = \lim_{\Delta x^\mu \to 0} \frac{\psi(x^\mu + \Delta x^\mu) - \psi_\parallel(x^\mu + \Delta x^\mu)}{\Delta x^\mu}.$$

非可換ゲージ場

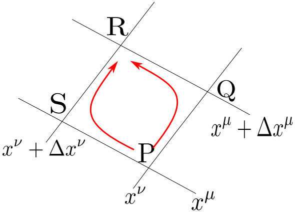
$\psi(x)$ を二つの経路 P → Q → R, P → S → R に沿って平行移動させて，その差を取る．



$$
\begin{aligned}
&\psi_{\mathrm{PQR}\parallel}(x^\mu + \Delta x^\mu, x^\nu + \Delta x^\nu) \\
&= \psi_{\mathrm{PQ}\parallel}(x^\mu + \Delta x^\mu, x^\nu) \\
&\quad - ig\Delta x^\nu A_\nu(x^\mu + \Delta x^\mu, x^\nu) \\
&\qquad \times \psi_{\mathrm{PQ}\parallel}(x^\mu + \Delta x^\mu, x^\nu) \\
&= \psi(x) - ig\Delta x^\mu A_\mu(x)\psi(x) \\
&\quad - ig\Delta x^\nu (A_\nu(x) + \Delta x^\mu \partial_\mu A_\nu(x)) \\
&\qquad \times (\psi(x) - ig\Delta x^\mu A_\mu(x)\psi(x))
\end{aligned}
$$

非可換ゲージ場

$\psi(x)$ を二つの経路 P → Q → R，P → S → R に沿って平行移動させて，その差を取る．

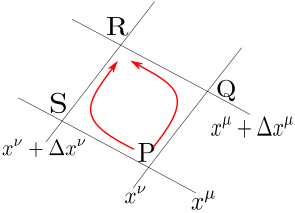


$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{PQR}\|} &= \psi(x) - \mathrm{i}g(\Delta x^\mu \mathrm{A}_\mu(x) + \Delta x^\nu \mathrm{A}_\nu(x))\psi(x) \\ &\quad - \mathrm{i}g\Delta x^\mu \Delta x^\nu [\partial_\mu \mathrm{A}_\nu(x) - \mathrm{i}g\mathrm{A}_\nu(x)\mathrm{A}_\mu(x)]\psi(x), \\ \psi_{\mathrm{PSR}\|} &= \psi(x) - \mathrm{i}g(\Delta x^\mu \mathrm{A}_\mu(x) + \Delta x^\nu \mathrm{A}_\nu(x))\psi(x) \\ &\quad - \mathrm{i}g\Delta x^\mu \Delta x^\nu [\partial_\nu \mathrm{A}_\mu(x) - \mathrm{i}g\mathrm{A}_\mu(x)\mathrm{A}_\nu(x)]\psi(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\psi_{\mathrm{PSR}\|} - \psi_{\mathrm{PQR}\|} \\ &= \mathrm{i}g\Delta x^\mu \Delta x^\nu \underbrace{(\partial_\mu \mathrm{A}_\nu(x) - \partial_\nu \mathrm{A}_\mu(x) + \mathrm{i}g[\mathrm{A}_\mu, \mathrm{A}_\nu])}_{\text{曲率}}\psi(x)\end{aligned}$$

$$\left([\mathrm{A}_\mu, \mathrm{A}_\nu] := \mathrm{A}_\mu \mathrm{A}_\nu - \mathrm{A}_\nu \mathrm{A}_\mu \right).$$

非可換ゲージ場



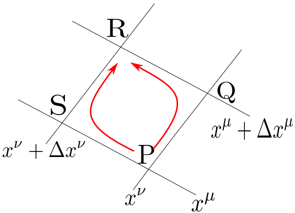
$$\psi_{\mathrm{PSR}\|} - \psi_{\mathrm{PQR}\|} = \mathrm{i}g\Delta x^\mu \Delta x^\nu \mathsf{F}_{\mu\nu}(x)\psi(x),$$

曲率

$$\mathsf{F}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \mathsf{A}_\nu(x) - \partial_\nu \mathsf{A}_\mu(x) + \mathrm{i}g[\mathsf{A}_\mu(x), \mathsf{A}_\nu(x)].$$

可換ゲージ場の場合の電磁場に相当.

非可換ゲージ場



$$\psi_{\mathrm{PSR}\|} - \psi_{\mathrm{PQR}\|} = ig\Delta x^\mu \Delta x^\nu F_{\mu\nu}(x)\psi(x),$$

曲率

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + ig[A_\mu(x), A_\nu(x)].$$

可換ゲージ場の場合の電磁場に相当.

ゲージ変換則.

$$F'_{\mu\nu}(x) = U(x)F_{\mu\nu}(x)U^{-1}(x).$$

Contents

1 はじめに

2 可換ゲージ理論（電磁場）

3 非可換ゲージ場

4 Lie 群と Lie 代数

5 ゲージ場の Laplacian と方程式

6 ゲージ理論の歴史

7 まとめ

Lie 群と Lie 代数

U(x)：$N \times N$ ユニタリ行列，i.e.,

$$\mathrm{U}(x) \in U(N) := \{\, N \times N \text{ ユニタリ行列} \,\}\,.$$

$U(N)$ は Lie 群の一つである．

Lie 群 G とその Lie 代数 $\mathfrak{g}$

- Lie 群：連続変数をパラメタに持つ行列がなす群．
- Lie 群 G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$．

$$\mathfrak{g} := \{\, \text{行列 } \mathrm{X} \mid \exp(t\mathrm{X}) \in G \ (\,\forall t \in \mathbb{R}\,) \,\}\,.$$

∗ $\mathfrak{g}$ は g（小文字）のドイツ文字．
手書きの仕方は「ドイツ文字」「フラクトゥール」で検索すればわかる．
∗ Lie 群 G：厳密には，$GL(N, \mathbb{C})$ の閉部分群．

$$GL(N, \mathbb{C}) := \{\, N \times N \text{ 複素行列 A} \mid \det \mathrm{A} \neq 0 \,\}\,.$$

$$\text{「閉」の意味} \quad \mathrm{A}_n \in G \ (\, n = 0, 1, 2, \ldots \,) \ \Rightarrow \ \lim_{n \to \infty} \mathrm{A}_n \in G\,.$$

【例】$SU(N)$.

$$SU(N) := \left\{\, \mathbb{A} \,\middle|\, \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{\dagger} \ \text{(ユニタリ行列である)},\ {\color{red}\det \mathrm{A} = 1} \,\right\}.$$

$\mathfrak{su}(N)$：$SU(N)$ の Lie 代数.
$\mathrm{X} \in \mathfrak{su}(N)$ とすると，$\exp(t\mathrm{X}) \in SU(N)$ ($\forall t \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} \exp(t\mathrm{X})^{-1} &= \exp(t\mathrm{X})^{\dagger}, & \det\exp(t\mathrm{X}) &= 1, \\ \exp(t\mathrm{X}^{\dagger}) &= \exp(-t\mathrm{X}), & \exp(t\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{X}) &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

(1) 各式の両辺を t について微分して $t = 0$ とおくと，

$$\mathrm{X}^{\dagger} = -\mathrm{X}, \quad \mathrm{Tr}\,\mathrm{X} = 0. \tag{2}$$

逆に，行列 X が (2) を満たせば，$\exp(t\mathrm{X}) \in SU(N)$ ($\forall t \in \mathbb{R}$) が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mathfrak{su}(N) &= \left\{\, N \times N \text{ 行列 } \mathrm{X} \,\middle|\, \mathrm{X}^{\dagger} = -\mathrm{X},\ \mathrm{Tr}\,\mathrm{X} = 0 \,\right\} \\ &= \{\, i\mathrm{Y} \mid \mathrm{Y} \text{ は Hermite 行列 \& } \mathrm{Tr}\,\mathrm{Y} = 0 \,\}. \end{aligned}$$

$N = 2$ の場合，

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ 2 \times 2 \text{ 行列 } \mathsf{X} \;\middle|\; \mathsf{X}^\dagger = -\mathsf{X},\ \ \mathrm{Tr}\,\mathsf{X} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} \mathrm{i}x_3 & \mathrm{i}x_1 + x_2 \\ \mathrm{i}x_1 - x_2 & -\mathrm{i}x_3 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{su}(2) = \{ \mathrm{i}(x_1\sigma_x + x_2\sigma_y + x_3\sigma_z) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \},$$

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Pauli 行列.}$$

$\mathrm{i} \times$ Pauli 行列 は $\mathfrak{su}(2)$ の基底をなす．

Lie 代数の性質

$\mathfrak{g}$: Lie 群 G の Lie 代数.

1. $\mathfrak{g}$ は $\mathbb{R}$ 上線型空間である.
2. $\mathfrak{g}$ は交換子積について閉じている.

$$\mathsf{X}, \mathsf{Y} \in \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad [\mathsf{X}, \mathsf{Y}] = \mathsf{X}\mathsf{Y} - \mathsf{Y}\mathsf{X} \in \mathfrak{g}.$$

【証明】$\mathsf{X}, \mathsf{Y} \in \mathfrak{g}$, $t \in \mathbb{R}$ とする.
$\exp((t/n)\mathsf{X}), \exp((t/n)\mathsf{Y}) \in G$ ($n \in \mathbb{N}$) により,

$$\exp(t(\mathsf{X} + \mathsf{Y})) = \lim_{n\to\infty} \left[\exp\left(\frac{t}{n}\mathsf{X}\right) \exp\left(\frac{t}{n}\mathsf{Y}\right)\right]^n \in G.$$

$$\exp(t[\mathsf{X}, \mathsf{Y}]) = \lim_{n\to\infty} \left[\exp\left(\frac{t}{n}\mathsf{X}\right) \exp\left(\frac{t}{n}\mathsf{Y}\right) \exp\left(-\frac{t}{n}\mathsf{X}\right) \exp\left(-\frac{t}{n}\mathsf{Y}\right)\right]^{n^2} \in G.$$

G が閉部分群であることを使っている（極限操作）.

ψ の x^μ 軸に沿っての微小平行移動.

$$\begin{aligned}\psi_{\parallel}(x^\mu + \Delta x^\mu) &= \psi(x^\mu) - \mathrm{i}g\Delta x^\mu \mathrm{A}_\mu(x)\psi(x) \\ &\simeq \exp(-\mathrm{i}g\Delta x^\mu \mathrm{A}_\mu(x))\psi(x).\end{aligned}$$

したがって，$\exp(-\mathrm{i}g\Delta x^\mu \mathrm{A}_\mu(x)) \in G = U(N)$ であるから，

$$\mathrm{i}\mathrm{A}_\mu(x) \in \mathfrak{g} = \mathfrak{u}(N).$$

- $\{\mathrm{iG}_a\}_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}}$: $\mathfrak{g}$ の基底.
- $\mathrm{A}_\mu(x) = A_\mu^a(x)\mathrm{G}_a$ と展開する.
  添字 a についても Einstein の規約を適用する（a について和をとる）.

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は交換子積について閉じているから，$\mathfrak{g}$ の基底 $\{\mathrm{i}G_a\}$ について

$$[G_a, G_b] = -[\mathrm{i}G_a, \mathrm{i}G_b] \in \mathfrak{g}.$$

よって，$[G_a, G_b]$ は $\mathfrak{g}$ の基底 $\{\mathrm{i}G_c\}$ で展開される．

Lie 代数の構造定数 f_{ab}^c

$$[G_a, G_b] = \mathrm{i} f_{ab}^c G_c, \qquad f_{ab}^c \in \mathbb{R}.$$

構造定数の性質

$$(1) \quad f_{ab}^c = -f_{ba}^c.$$
$$(2) \quad f_{ad}^e f_{bc}^d + f_{bd}^e f_{ca}^d + f_{cd}^e f_{ab}^d = 0.$$

(2) は Jacobi 律

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

を用いて証明できる．

ゲージ場 $\mathsf{A}_\mu(x)$，曲率 $\mathsf{F}_{\mu\nu}(x)$ の成分表示

$$\mathsf{A}_\mu(x) = A^a_\mu(x)\mathsf{G}_a, \quad \mathsf{F}_{\mu\nu}(x) = F^a_{\mu\nu}(x)\mathsf{G}_a,$$
$$F^a_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A^a_\nu(x) - \partial_\nu A^a_\mu(x) - g f^c_{ab} A^b_\mu(x) A^c_\nu(x).$$

Contents

1 はじめに

2 可換ゲージ理論（電磁場）

3 非可換ゲージ場

4 Lie 群と Lie 代数

5 ゲージ場の Laplacian と方程式

6 ゲージ理論の歴史

7 まとめ

可換ゲージ場（電磁場）の場合．

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}, \quad \mathscr{L} = \mathscr{L}_\mathrm{M} + \mathscr{L}_\mathrm{G},$$

$$\mathscr{L}_\mathrm{M} = \mathrm{i}c\hbar\overline{\psi}\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}A_\mu\right)\psi - mc^2\overline{\psi}\psi,$$

$$\mathscr{L}_\mathrm{G} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x).$$

Lagrangian 密度 $\mathscr{L}$ は次のゲージ変換で不変であった．

$$\psi \to \psi' = \exp\left(\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\chi(x)\right)\psi,$$

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu(x).$$

ゲージ場の Laplacian と方程式

非可換ゲージ場の場合．

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}, \quad \mathscr{L} = \mathscr{L}_\mathrm{M} + \mathscr{L}_\mathrm{G},$$

$$\mathscr{L}_\mathrm{M} = \mathrm{i}\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}g\mathrm{A}_\mu(x))\psi - m\overline{\psi}\psi.$$

ゲージ場の Lagrangian 密度 $\mathscr{L}_\mathrm{G}$ はどうとるか？

- Lagrangian 密度 $\mathscr{L}$ はゲージ変換 $\psi \to \psi' = \mathrm{U}(x)\psi$ で不変にしたい．
- $\mathscr{L}_\mathrm{M}$ はゲージ変換で不変である．
- 可換ゲージ場の場合：$F_{\mu\nu}(x)$ はゲージ変換で不変．

$$\mathscr{L}_\mathrm{G} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x).$$

- 非可換ゲージ場の場合：

$$\mathrm{F}_{\mu\nu}(x) \to \mathrm{F}'_{\mu\nu}(x) = \mathrm{U}(x)\mathrm{F}_{\mu\nu}(x)\mathrm{U}^{-1}(x).$$

ゲージ場の Laplacian と方程式

非可換ゲージ場の場合.

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}, \quad \mathscr{L} = \mathscr{L}_\mathrm{M} + \mathscr{L}_\mathrm{G},$$

$$\mathscr{L}_\mathrm{M} = \mathrm{i}\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}g\mathrm{A}_\mu(x))\psi - m\overline{\psi}\psi.$$

ゲージ場の Lagrangian 密度 $\mathscr{L}_\mathrm{G}$ はどうとるか？

$$\mathscr{L}_\mathrm{G} = -\frac{1}{4\kappa_0}\mathrm{Tr}(\mathrm{F}_{\mu\nu}(x)\mathrm{F}^{\mu\nu}(x)) \quad (\ \kappa_0\ :\ \ \mathrm{const.}\ ).$$

$\mathscr{L} = \mathscr{L}_\mathrm{M} + \mathscr{L}_\mathrm{G}$ はゲージ変換 $\psi \to \psi' = \mathrm{U}(x)\psi$ で不変である.

ゲージ場の Laplacian と方程式

$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(N)$ の基底 $\{\mathrm{i}\mathsf{G}_a\}$ を使ってゲージ場 $\mathsf{A}_\mu(x)$，曲率 $\mathsf{F}_{\mu\nu}(x)$ を

$$\mathsf{A}_\mu(x) = A_\mu^a(x)\mathsf{G}_a, \quad \mathsf{F}_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}^a(x)\mathsf{G}_a,$$
$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - g f_{bc}^a A_\mu^b(x) A_\nu^c(x)$$

と展開すると，

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\mathsf{M}} + \mathsf{L}_{\mathsf{G}},$$
$$\mathscr{L}_{\mathsf{M}} = \mathrm{i}\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}gA_\mu^a(x)\mathsf{G}_a)\psi - m\overline{\psi}\psi,$$
$$\mathscr{L}_{\mathsf{G}} = -\frac{1}{4\kappa_0}\kappa_{ab}F_{\mu\nu}^a(x)F^{\mu\nu a}(x),$$

ここで，

$$\kappa_{ab} := \mathrm{Tr}(\mathsf{G}_a\mathsf{G}_b) \quad (\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(N) \text{ の Killing 形式}).$$

ゲージ場の Laplacian と方程式

$S = \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}$ の $A^a_\mu(x)$ についての変分をとって $\delta S = 0$ とすると，

ゲージ場の方程式 (1)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}_a(x) - g f^c_{ab} A^b_\mu(x) F^{\mu\nu}_c(x) = \kappa_0 g \overline{\psi} \gamma^\nu G_a \psi,$$
$$F^{\mu\nu}_a(x) := \kappa_{ab} F^{\mu\nu b}(x).$$

∗ 可換ゲージ場（電磁場）の場合（Maxwell 方程式の一部）

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \mu_0 j^\nu, \quad j^\nu = cq\overline{\psi}\gamma^\nu\psi.$$

ゲージ場の Laplacian と方程式

いまは $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(N)$ であるから，基底 $\{\mathrm{i}\mathrm{G}_a\}$ を適当に取ることにより

$$\kappa_{ab} = \mathrm{Tr}(\mathrm{G}_a \mathrm{G}_b) = \delta_{ab} = \begin{cases} 1 & (\ a = b\ ), \\ 0 & (\ a \neq b\ ) \end{cases}$$

とできる．

【理由】

$$\mathfrak{su}(N) = \{\ \mathrm{iX} \mid \mathrm{X}\ \text{は Hermite 行列}\ \&\ \mathrm{Tr}\,\mathrm{X} = 0\ \}$$

であるから，$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) := \mathrm{Tr}(\mathrm{XY}) \quad (\ \mathrm{iX}, \mathrm{iY} \in \mathfrak{su}(N)\ )$ は非退化である，i.e.,

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0\ (\ \text{for}\ \forall\ \mathrm{Y}\ ) \ \Rightarrow\ \mathrm{X} = 0.$$

したがって，$\{\mathrm{G}_a\}$ を「内積」$(\cdot, \cdot)$ について Gram-Schmidt 直交化すればよい．

ゆえに，

$$\partial_\mu F^{\mu\nu a}(x) - \sum_c g f^a_{bc} A^b_\mu(x) F^{\mu\nu}_c(x) = \kappa_0 g f^a_{bc} A^b_\mu(x) F^{\mu\nu}_c(x).$$

ゲージ場の Laplacian と方程式

ゲージ場の方程式 (1)

$$\mathrm{D}_\mu \mathrm{F}^{\mu\nu}(x) = \kappa_0 \boldsymbol{j}^\nu,$$

ここで，

$$\boldsymbol{j}^\nu := \sum_a (g\overline{\psi}\gamma^\nu \mathrm{G}_a \psi)\mathrm{G}_a,$$

$$\mathrm{D}_\lambda \mathrm{F}^{\mu\nu}(x) := \partial_\lambda \mathrm{F}^{\mu\nu}(x) + \mathrm{i}g[\mathrm{A}_\lambda(x), \mathrm{F}^{\mu\nu}(x)]$$

(曲率 $\mathrm{F}^{\mu\nu}$ の共変微分).

∗ 可換ゲージ場（電磁場）の場合（Maxwell 方程式の一部）

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \mu_0 j^\nu, \quad j^\nu = cq\overline{\psi}\gamma^\nu\psi.$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = j + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}.$$

ゲージ場の Lagrangian と方程式

曲率 $F^{\mu\nu}$ の共変微分

$$D_\lambda F^{\mu\nu}(x) := \partial_\lambda F^{\mu\nu}(x) + ig[A_\lambda(x), F^{\mu\nu}(x)].$$

なぜ，曲率に対しては共変微分をこのように定義するのか？

曲率 $F^{\mu\nu}$ の共変微分

$$D_\lambda F^{\mu\nu}(x) := \partial_\lambda F^{\mu\nu}(x) + ig[A_\lambda(x), F^{\mu\nu}(x)].$$

なぜ，曲率に対しては共変微分をこのように定義するのか？

- 微小平行移動：$\psi_{\parallel}(x^\lambda + \Delta x^\lambda) = \exp(-ig\Delta x^\lambda A_\lambda(x))\psi(x)$.
- ゲージ変換 $\psi \to \psi' = U(x)\psi$ に対する曲率の変換則．

$$F^{\mu\nu}(x) \to F^{\mu\nu\prime}(x) = U(x)F^{\mu\nu}(x)U^{-1}(x).$$

微小平行移動をゲージ変換とみなせば，曲率の微小平行移動は次で定義される．

$$\begin{aligned}
F_{\parallel}^{\mu\nu}(x^\lambda + \Delta x^\lambda) &= \exp(-ig\Delta x^\lambda A_\lambda(x))F^{\mu\nu}(x)\exp(ig\Delta x^\lambda A_\lambda(x)) \\
&\simeq (1 - ig\Delta x^\lambda A_\lambda(x))F^{\mu\nu}(x)(1 + ig\Delta x^\lambda A_\lambda(x)) \\
&\simeq F^{\mu\nu}(x) - ig\Delta x^\lambda [A_\lambda(x), F^{\mu\nu}(x)].
\end{aligned}$$

ゲージ場の Lagrangian と方程式

曲率 $\mathsf{F}^{\mu\nu}$ の共変微分

$$\mathsf{D}_\lambda \mathsf{F}^{\mu\nu}(x) := \partial_\lambda \mathsf{F}^{\mu\nu}(x) + ig[\mathsf{A}_\lambda(x), \mathsf{F}^{\mu\nu}(x)].$$

なぜ，曲率に対しては共変微分をこのように定義するのか？

- 微小平行移動：$\psi_\parallel(x^\lambda + \Delta x^\lambda) = \exp(-ig\Delta x^\lambda \mathsf{A}_\lambda(x))\psi(x)$.
- ゲージ変換 $\psi \to \psi' = \mathsf{U}(x)\psi$ に対する曲率の変換則.

$$\mathsf{F}^{\mu\nu}(x) \to \mathsf{F}^{\mu\nu\prime}(x) = \mathsf{U}(x)\mathsf{F}^{\mu\nu}(x)\mathsf{U}^{-1}(x).$$

微小平行移動をゲージ変換とみなせば，曲率の微小平行移動は次で定義される．

$$\mathsf{F}_\parallel^{\mu\nu}(x^\lambda + \Delta x^\lambda) = \mathsf{F}^{\mu\nu}(x) - ig\Delta x^\lambda [\mathsf{A}_\lambda(x), \mathsf{F}^{\mu\nu}(x)].$$

共変微分は平行移動してから差を取るのであるから，

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}_\lambda \mathsf{F}^{\mu\nu}(x) &= \lim_{\Delta x^\lambda \to 0} \frac{\mathsf{F}^{\mu\nu}(x^\lambda + \Delta x^\lambda) - \mathsf{F}_\parallel^{\mu\nu}(x^\lambda + \Delta x^\lambda)}{\Delta x^\lambda} \\
&= \partial_\lambda \mathsf{F}^{\mu\nu}(x) + ig[\mathsf{A}_\lambda(x), \mathsf{F}^{\mu\nu}(x)].
\end{aligned}$$

ゲージ場の Lagrangian と方程式

曲率 $F^{\mu\nu}$ の共変微分

$$D_\lambda F^{\mu\nu}(x) := \partial_\lambda F^{\mu\nu}(x) + ig[A_\lambda(x), F^{\mu\nu}(x)].$$

共変微分のゲージ変換則.

$$D_\lambda F^{\mu\nu}(x) \to (D_\lambda F^{\mu\nu}(x))' = U(x) D_\lambda F^{\mu\nu}(x) U^{-1}(x).$$

ゲージ場の Laplacian と方程式

もう一つのゲージ場の方程式.

ゲージ場の方程式 (2)（Bianchi の恒等式）

$$\mathrm{D}_\lambda \mathrm{F}_{\mu\nu}(x) + \mathrm{D}_\mu \mathrm{F}_{\nu\lambda}(x) + \mathrm{D}_\nu \mathrm{F}_{\lambda\mu}(x) = 0,$$

$$\mathrm{D}_\lambda \mathrm{F}_{\mu\nu}(x) := \partial_\lambda \mathrm{F}_{\mu\nu}(x) + ig[\mathrm{A}_\lambda(x), \mathrm{F}_{\mu\nu}(x)] \quad \text{（曲率 } \mathrm{F}_{\mu\nu} \text{ の共変微分）}.$$

可換ゲージ場（電磁場）の場合（Maxwell 方程式の一部）

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu F_{\nu\lambda}(x) + \partial_\nu F_{\lambda\mu}(x) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{B} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{E}.$$

ゲージ場の Laplacian と方程式

もう一つのゲージ場の方程式.

ゲージ場の方程式 (2)（Bianchi の恒等式）

$$D_\lambda F_{\mu\nu}(x) + D_\mu F_{\nu\lambda}(x) + D_\nu F_{\lambda\mu}(x) = 0,$$

$$D_\lambda F_{\mu\nu}(x) := \partial_\lambda F_{\mu\nu}(x) + ig[A_\lambda(x), F_{\mu\nu}(x)] \quad \text{（曲率 } F_{\mu\nu} \text{ の共変微分）.}$$

【理由】Jacobi 律

$$[D_\lambda, [D_\mu, D_\nu]] + [D_\mu, [D_\nu, D_\lambda]] + [D_\nu, [D_\lambda, D_\mu]] = 0.$$

さらに次の等式が示される.

$$[D_\mu, D_\nu]\psi = igF_{\mu\nu}(x)\psi.$$

よって,

$$D_\lambda(F_{\mu\nu}\psi) - F_{\mu\nu}D_\lambda\psi + D_\mu(F_{\nu\lambda}\psi) - F_{\nu\lambda}D_\mu\psi + D_\nu(F_{\lambda\mu}\psi) - F_{\nu\lambda}D_\mu\psi = 0.$$

$$D_\lambda(F_{\mu\nu}\psi) = (D_\lambda F_{\mu\nu})\psi + F_{\mu\nu}(D_\lambda\psi)$$

を示すことができるので,

$$(D_\lambda F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu})\psi = 0.$$

Contents

1 はじめに

2 可換ゲージ理論（電磁場）

3 非可換ゲージ場

4 Lie 群と Lie 代数

5 ゲージ場の Laplacian と方程式

6 ゲージ理論の歴史

7 まとめ

ゲージ理論の歴史

- （1954 年）Yang-Mills 理論：核子（陽子・中性子）の間に働く力．

$$G = SU(2), \quad \psi = \begin{bmatrix} p(x) \\ n(x) \end{bmatrix}.$$

- （ほぼ同時期）内山龍雄：一般ゲージ場理論．

  狭義 Lorentz 群の場合のゲージ場は重力場である．

  参考文献

  - 内山龍雄：一般ゲージ場論序説，岩波書店（1987 年）．
  - 中嶋慧，松尾衛：一般ゲージ理論と共変解析力学，現代数学社（2020 年）．

Contents

1. はじめに
2. 可換ゲージ理論（電磁場）
3. 非可換ゲージ場
4. Lie 群と Lie 代数
5. ゲージ場の Laplacian と方程式
6. ゲージ理論の歴史
7. まとめ

まとめ

- 可換ゲージ理論：次のゲージ変換で系は不変.

$$\psi \to \exp\left(\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\chi(x)\right)\psi.$$

- 非可換ゲージ理論：次のゲージ変換で系は不変.

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} {U_1}^1(x) & \cdots & {U_1}^N(x) \\ \vdots & & \vdots \\ {U_N}^1(x) & \cdots & {U_N}^N(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix}.$$

  - 場 A_μ, 曲率 $\mathsf{F}_{\mu\nu}$ とそのゲージ変換則.
  - Lie 群と Lie 代数.
  - 場の方程式.

- Yang-Mills 理論 ($SU(2)$), 内山龍雄の一般ゲージ場理論.