解析力学 (1)

幾何学的視点から

緒方秀教

電気通信大学大学院　情報・ネットワーク工学専攻

December 4, 2022

はじめに

これから「解析力学」を学びます.
ところで，解析力学って…

- 何のために勉強するのかわからない.
- 現代物理学（相対性理論，量子力学，統計力学，etc.）を学ぶために必要というが…
  古典力学の範囲でありがたみを感じたい.

はじめに

これから「解析力学」を学びます．
ところで，解析力学って…

- 何のために勉強するのかわからない．
- 現代物理学（相対性理論，量子力学，統計力学，etc.）を学ぶために必要というが…
  古典力学の範囲でありがたみを感じたい．

そこで，

数学的とくに「幾何学的」視点から力学を考えるという方針で，解析力学を学んでみます．

はじめに

解析力学の特徴

座標の選び方によらない「不変性」．

初等力学：Newton の運動方程式

- 直交座標（Cartesian 座標）(x, y)．

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial V}{\partial y}.$$

- 極座標 (r, θ) $(\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ )$.

$$m(r\ddot{\theta} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta}) = -\frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

座標によって運動方程式の表式が変わる．

はじめに

解析力学の特徴

座標の選び方によらない「不変性」．

解析力学：Lagrange 運動方程式（L：Lagrangian）

- 直交座標（Cartesian 座標）(x, y)．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

- 極座標 (r, θ) $(\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ )$.

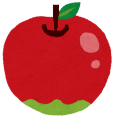
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,$$

異なる座標に対して方程式の形が同じ．

はじめに：不変性

- 座標は人間の都合で与えたモノサシ．
- 物理学の本質的なものは，人間のモノサシ（座標）によって変わらない．

本質



$\Leftarrow$

言葉（人間のモノサシ）

りんご（日）　apple（英）　Apfel（独）

pomme（仏）　manzana（西）　苹果・蘋果（中・台）

사과（韓）

はじめに：不変性

解析力学=力学の不変性

- 力学における不変性という視点から解析力学を学んでみよう.
- 不変性を扱うには···←幾何学.

はじめに：不変性

解析力学＝力学の不変性

- 力学における不変性という視点から解析力学を学んでみよう．
- 不変性を扱うには…←幾何学．

エルランゲン・プログラム（クライン F. Klein, Erlangen Program）

- 1872 年，クラインがエルランゲン大学に就任したときの講演．
- 幾何学的性質とは変換群の作用で不変に保たれる性質である．

今回の内容

一部細かい証明は「補遺」に載せました．これは動画では説明しません．
この PC スライドを web に載せますので，概要欄の URL にアクセスして御覧ください．

今回の内容

d'Alembert の原理から運動方程式へ

仮想仕事の原理（静力学）　質点系（N_{particle} 個）

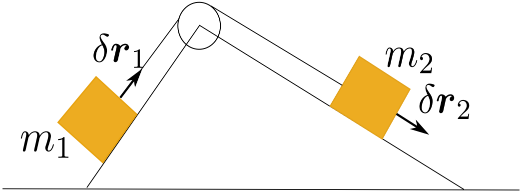
- 各質点の位置 $\boldsymbol{r}_i$，質量 m_i $(i = 1, 2, \ldots, N_{\text{particle}})$.
- 各質点に働く（束縛力でない）力 $\boldsymbol{F}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N_{\text{particle}})$.
- 束縛力（垂直抗力 etc.）$\boldsymbol{S}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N_{\text{particle}})$.

質点系が釣り合いの状態にある時，

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{S}_i = \boldsymbol{0} \quad (i = 1, 2, \ldots, N_{\text{particle}}).$$

$\delta\boldsymbol{r}_i$：仮想変位 (virtual displacement)
束縛条件下で許される各質点の微小変位.

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{S}_i) \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0.$$



d'Alembert の原理から運動方程式へ

仮想仕事の原理（静力学）

束縛力 $\perp$ 仮想変位（$\boldsymbol{S}_i \perp \delta \boldsymbol{r}_i$）より $\boldsymbol{S}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$ であるから，

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0.$$

仮想仕事の原理

質点系が釣り合いの状態にある時，微小な仮想変位 $\delta \boldsymbol{r}_i$ によって
質点系に（束縛力を除く）力 $\boldsymbol{F}_i$ がする仕事の総和はゼロである．

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0.$$

束縛力 $\boldsymbol{S}_i$ は考慮しなくてよい．

d’Alembert の原理から運動方程式へ

$\boxed{\text{d’Alembert の原理（動力学）}}$ 質点系が運動している時，

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{S}_i \quad (\, i = 1, 2, \ldots, N_{\text{particle}} \,).$$

d’Alembert の原理から運動方程式へ

$\boxed{\text{d’Alembert の原理（動力学）}}$ 質点系が運動している時，

微小な仮想変位 $\delta \boldsymbol{r}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, N_{\text{particle}}$) に対して

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} \left(\boldsymbol{F}_i \underbrace{- m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2}}_{\text{慣性力}} \right) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0.$$

d’Alembert の原理から運動方程式へ

$\boxed{\text{d’Alembert の原理（動力学）}}$ 質点系が運動している時，

微小な仮想変位 $\delta \boldsymbol{r}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, N_{\text{particle}}$) に対して

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} \Bigg(\boldsymbol{F}_i \underbrace{-m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2}}_{\text{慣性力}} \Bigg) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0.$$

d’Alembert（ダランベール）の原理

質点系が運動している時，微小な仮想変位により質点系に加えられた力と慣性力のする仕事の総和はゼロである．

- 束縛力 S_i は考慮しなくてよい．
- （慣性力 $\rightarrow$）動力学を静力学の問題に置き換えている．

d'Alembert の原理から運動方程式へ

これから，d'Alembert の原理を出発点にして運動方程式を導出する．

d'Alembert の原理から運動方程式へ

これから，d'Alembert の原理を出発点にして運動方程式を導出する．

一般座標

束縛条件下の質点系の変位を与える独立なパラメータ $q^1, \ldots, q^N$．

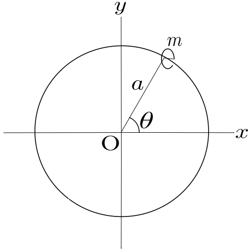
$$\text{各質点の変位ベクトル} \quad \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q^1, \ldots, q^N) \quad (\, i = 1, 2, \ldots, N_{\text{particle}}\,)$$

後の都合上，上付き添字を用いる．

- N：質点系の自由度．
- 拘束条件が M 個あれば，$N = 3N_{\text{particle}} - M$.

d'Alembert の原理から運動方程式へ

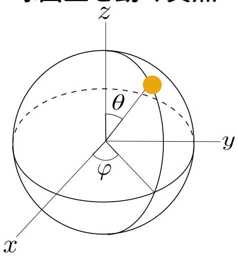
円周上を動くリング.



自由度 $N = 1$，**一般座標** θ

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta.$$

球面上を動く質点.



自由度 $N = 2$，**一般座標** θ, φ

$$x = a\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = a\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = a\cos\theta.$$

d'Alembert の原理から運動方程式へ

d'Alembert の原理．

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} \left(\boldsymbol{F}_i - m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} \right) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0.$$

d’Alembert の原理から運動方程式へ

d’Alembert の原理：一般座標 $q^1, \ldots, q^N$ を用いると，

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{particle}}} \left(\boldsymbol{F}_i - m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} \right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha = 0.$$

d’Alembert の原理から運動方程式へ

d’Alembert の原理：一般座標 $q_1, \ldots, q_N$ を用いると，

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \left\{ \sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} \left(\boldsymbol{F}_i - m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} \right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} \right\} \delta q^\alpha = 0.$$

これが任意の独立な微小パラメータ $\delta q^1, \ldots, \delta q^N$ に対して成り立つから，$\{\cdots\} = 0$, i.e.,

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} \left(\boldsymbol{F}_i - m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} \right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} = 0 \quad (\, \alpha = 1, \ldots, N \,).$$

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} = \sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} =: \mathscr{F}_\alpha \quad (\, \alpha = 1, \ldots, N \,),$$

$\mathscr{F}_\alpha$ ：一般化力 $(\, \alpha = 1, \ldots, N \,)$.

d'Alembert の原理から運動方程式へ

$$\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{particle}}} m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} = \mathscr{F}_\alpha \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,),$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{\beta=1}^{N} \frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{\beta=1}^{N} \frac{\mathrm{d}^2 q^\beta}{\mathrm{d}t^2} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta} + \sum_{\beta,\gamma=1}^{N} \frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}q^\gamma}{\mathrm{d}t} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta \partial q^\gamma}.$$

d’Alembert の原理から運動方程式へ

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} = \mathscr{F}_\alpha \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,),$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{\beta=1}^{N} \frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{\beta=1}^{N} \frac{\mathrm{d}^2 q^\beta}{\mathrm{d}t^2} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta} + \sum_{\beta,\gamma=1}^{N} \frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}q^\gamma}{\mathrm{d}t} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta \partial q^\gamma}.$$

よって，次の方程式を得る．

$$\sum_{\beta=1}^{N} g_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}^2 q^\beta}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{\beta,\gamma=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}q^\gamma}{\mathrm{d}t} = \mathscr{F}_\alpha \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,),$$

$$g_{\alpha\beta} := \sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta}, \quad \Gamma_{\alpha\beta\gamma} := \sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta \partial q^\gamma}.$$

d’Alembert の原理から運動方程式へ

$[g_{\alpha\beta}]$ は正値対称行列だから逆行列をもつ．それを $[g^{\alpha\beta}]$ と記すと，

運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 q^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{\beta,\gamma=1}^{N} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q^\gamma}{\mathrm{d}t} = \mathscr{F}^\alpha \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,),$$

$$[g^{\alpha\beta}] \ : \ [g_{\alpha\beta}] \text{ の逆行列}, \quad g_{\alpha\beta} := \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{particle}}} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta},$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} := \sum_{\delta=1}^{N} g^{\alpha\delta}\Gamma_{\delta\beta\gamma} = \sum_{\delta=1}^{N}\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{particle}}} g^{\alpha\delta} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\delta} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta \partial q^\gamma} \quad \text{Christoffel の記号}.$$

$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ を $g_{\alpha\beta}$ を用いて書き直す．

d'Alembert の原理から運動方程式へ

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} := \sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta \partial q^\gamma}.$$

明らかに $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\gamma\beta}$. $g_{\alpha\beta}$ **の定義から，**

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} &= \frac{\partial}{\partial q^\gamma}\left(\sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta}\right) = \sum_i m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta \partial q^\gamma} + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\gamma}\right) \\ &= \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma},\end{aligned}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\gamma\alpha} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}, \quad \Gamma_{\beta\gamma\alpha} + \Gamma_{\gamma\alpha\beta} = \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha}, \quad \Gamma_{\gamma\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta}.$$

(第 1 式 + 第 2 式 − 第 3 式) $\div 2$ **をつくると，**

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha}\right), \quad \therefore \quad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\sum_{\delta=1}^{N} g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\delta}\right).$$

d'Alembert の原理から運動方程式へ

幾何学的運動方程式（ここだけの造語）

$$\frac{\mathrm{d}^2 q^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{\beta,\gamma=1}^{N} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}q^\gamma}{\mathrm{d}t} = \mathscr{F}^\alpha \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,),$$

$$g_{\alpha\beta} := \sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta} \quad \text{計量テンソル}, \quad [g^{\alpha\beta}] : [g_{\alpha\beta}]\ \text{の逆行列},$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \sum_{\delta=1}^{N} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\delta} \right) \quad \text{Christoffel の記号}.$$

とくに外力 $= 0$ の場合，

$$\frac{\mathrm{d}^2 q^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{\beta,\gamma=1}^{N} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}q^\gamma}{\mathrm{d}t} = 0.$$

測地線方程式と同じ形である．

今回の内容

運動方程式の幾何学

これまで現れた諸量，運動方程式について，その幾何学的性質を調べる．

点変換 $(q^\alpha) \to (Q^\alpha)$

$$Q^\alpha = Q^\alpha(q^1, \ldots, q^N) \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,)$$

上記の点変換に対する諸量の変換則を調べる．

その前に…

運動方程式の幾何学

Einstein の規約

ギリシャ文字の上付き添字と下付き添字のペアで同じ文字のものが現れたら，その添字について $1 \sim N$ まで和を取るものとする．

$$T^{\alpha\cdots}S_{\alpha\cdots} = \sum_{\alpha=1}^{N} T^{\alpha\cdots}S_{\alpha\cdots}.$$

- 微分幾何学（テンソル解析）を学ぶとこの手の和が頻繁に現れるので，和の記号 $\sum$ を省略する（しないと大変）．
- 縮約：ベクトル・テンソル→スカラー．

あと，簡単のため次のような略記法を用いる．

$$q = (q^1, \ldots, q^N), \quad Q = (Q^1, \ldots, Q^N), \quad f(q) = f(q^1, \ldots, q^N), \quad \text{etc.}$$

運動方程式の幾何学

幾何学的運動方程式

Einstein の規約を用いた表現.

$$\frac{\mathrm{d}^2 q^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}q^\gamma}{\mathrm{d}t} = \mathscr{F}^\alpha \quad (\, \alpha = 1, \ldots, N \,),$$

$$g_{\alpha\beta} := \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{particle}}} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta} \quad \text{計量テンソル}, \quad [g^{\alpha\beta}] \,:\, [g_{\alpha\beta}] \text{ の逆行列},$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\delta} \right) \quad \text{Christoffel の記号}.$$

赤い添字のペアに対して Einstein の規約を適用している.

運動方程式の幾何学

点変換 $(q^\alpha) \to (Q^\alpha)$ に対する変換則.

- 一般速度 $\dfrac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}t}$.

$$\frac{\mathrm{d}Q^\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t}\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta} \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,) \quad \text{反変ベクトルの変換則.}$$

- 一般化力.

$$\widetilde{\mathscr{F}}_\alpha := \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{particle}}} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial Q^\alpha} = \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{particle}}} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta}\frac{\partial q^\beta}{\partial Q^\alpha} = \mathscr{F}_\beta \frac{\partial q^\beta}{\partial Q^\alpha},$$

$$\therefore \quad \widetilde{\mathscr{F}}_\alpha = \mathscr{F}_\beta \frac{\partial q^\beta}{\partial Q^\alpha} \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,) \quad \text{共変ベクトルの変換則}$$

運動方程式の幾何学

点変換 $(q^\alpha) \to (Q^\alpha)$ に対する変換則．

- **計量テンソル $g_{\alpha\beta}$．**

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta} := \sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial Q^\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial Q^\beta} = \sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\gamma} \frac{\partial q^\gamma}{\partial Q^\alpha} \right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\delta} \frac{\partial q^\delta}{\partial Q^\beta} \right) = g_{\gamma\delta} \frac{\partial q^\gamma}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial q^\delta}{\partial Q^\beta},$$

$$\therefore \quad \widetilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\gamma\delta} \frac{\partial q^\gamma}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial q^\delta}{\partial Q^\beta}$$

2 階共変テンソルの変換則.

- **計量テンソル $g^{\alpha\beta}$（$[g_{\alpha\beta}]$ の逆行列）．**

$$\widetilde{g}^{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta} \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\gamma} \frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\delta}$$

2 階反変テンソルの変換則.

- **一般化力 $\mathscr{F}^\alpha = g^{\alpha\beta} \mathscr{F}_\beta$．**

$$\widetilde{\mathscr{F}}^\alpha = \mathscr{F}^\beta \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta}$$

反変ベクトルの変換則.

運動方程式の幾何学

- Christoffel の記号 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$．

$$\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial\widetilde{g}_{\delta\beta}}{\partial Q^\gamma} + \frac{\partial\widetilde{g}_{\delta\gamma}}{\partial Q^\beta} - \frac{\partial\widetilde{g}_{\beta\gamma}}{\partial Q^\delta}\right).$$

$g_{\alpha\beta}$，$g^{\alpha\beta}$ の変換則より．Christoffel の記号は次の変換則に従うことがわかる．
（証明は「補遺」参照）

$$\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\kappa_{\lambda\mu}\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma} + \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\lambda}\frac{\partial^2 q^\lambda}{\partial Q^\beta \partial Q^\gamma}.$$

Christoffel の記号はベクトル・テンソルの変換則に従わない．

- 一般化加速度 $\dfrac{\mathrm{d}^2 q^\alpha}{\mathrm{d}t^2}$.

$\dfrac{\mathrm{d}Q^\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta}$ の両辺を t で微分して，

$$\frac{\mathrm{d}^2 Q^\alpha}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 q^\beta}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta} + \frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q^\gamma}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^2 Q^\alpha}{\partial q^\beta \partial q^\gamma}.$$

共変／反変ベクトルの変換則に従わない．

運動方程式の幾何学

幾何学的運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 q^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}q^\gamma}{\mathrm{d}t} = \mathscr{F}^\alpha \quad (\, \alpha = 1, \dots, N \,).$$

一般化加速度と Christoffel の記号の変換則から，

運動方程式の両辺は反変ベクトルとして変換することがわかる．（証明は「補遺」参照）

$$\frac{\mathrm{d}^2 Q^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\mathrm{d}Q^\beta}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}Q^\gamma}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}^2 q^\delta}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\delta_{\beta\gamma} \frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}q^\gamma}{\mathrm{d}t} \right) \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\delta}, \quad \widetilde{\mathscr{F}}^\alpha = \mathscr{F}^\beta \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta}.$$

運動方程式の幾何学

幾何学的運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 q^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q^\gamma}{\mathrm{d}t} = \mathscr{F}^\alpha \quad (\,\alpha = 1,\ldots,N\,).$$

一般化加速度と Christoffel の記号の変換則から，
運動方程式の両辺は反変ベクトルとして変換することがわかる．（証明は「補遺」参照）

$$\frac{\mathrm{d}^2 Q^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}Q^\beta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}Q^\gamma}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}^2 q^\delta}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\delta_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q^\gamma}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\delta}, \qquad \widetilde{\mathscr{F}}^\alpha = \mathscr{F}^\beta\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta}.$$

幾何学的運動方程式の共変性

古い座標で運動方程式が成り立つなら，新しい座標でも運動方程式が成り立つ．

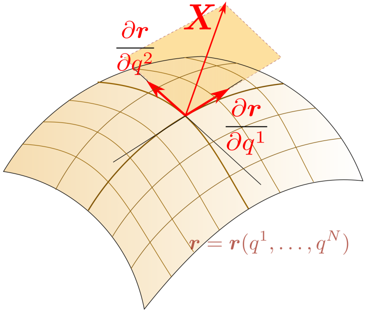
$$\frac{\mathrm{d}^2 Q^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}Q^\beta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}Q^\gamma}{\mathrm{d}t} = \widetilde{\mathscr{F}}^\alpha \quad (\,\alpha = 1,\ldots,N\,).$$

運動方程式の幾何学

- スカラー：座標変換で不変な量．
- 反変ベクトル：物理系が運動する空間の接ベクトル．
  上付き添字
  速度，外力（一般化力），etc.

$$X^\alpha \to \widetilde{X}^\alpha = X^\beta \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta},$$

$$\boldsymbol{X} = X^\alpha \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\alpha} = \widetilde{X}^\alpha \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial Q^\alpha}.$$



- 共変ベクトル：接ベクトルの双対ベクトル
  （微分 1 形式）．下付き添字

$$Y_\alpha \to \widetilde{Y}_\alpha = Y_\beta \frac{\partial q^\beta}{\partial Q^\alpha}.$$

運動方程式の幾何学

幾何学的運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 q^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}q^\gamma}{\mathrm{d}t} = \mathscr{F}^\alpha \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,).$$

左辺 $\dfrac{\mathrm{d}^2 q^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \dfrac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}q^\gamma}{\mathrm{d}t}$.

- 反変ベクトルである．
- 共変的な加速度と見なせる．

  $\dfrac{\mathrm{d}^2 q^\alpha}{\mathrm{d}t^2}$ は反変ベクトルでないので，物理的に意味のある加速度とはみなせない．
- 幾何学的運動方程式：共変的な Newton 運動方程式 (質量 $\times$ 加速度 $=$ 外力) と見なせる．

今回の内容

Lagrange 運動方程式

幾何学的運動方程式は実際の計算では使いにくいので，もっと使いやすい形に書き直す．

$$g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}^2 q^\beta}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma_{\alpha\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q^\gamma}{\mathrm{d}t}=\mathscr{F}_\alpha \quad (\,\alpha=1,\dots,N\,).$$

Lagrange 運動方程式

幾何学的運動方程式は実際の計算では使いにくいので，もっと使いやすい形に書き直す．

$$g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}^2 q^\beta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha}\right)\frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q^\gamma}{\mathrm{d}t} = \mathscr{F}_\alpha \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,).$$

Lagrange 運動方程式

幾何学的運動方程式は実際の計算では使いにくいので，もっと使いやすい形に書き直す．

$$g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}^2 q^\beta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}+\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta}-\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha}\right)\frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q^\gamma}{\mathrm{d}t}=\mathscr{F}_\alpha \quad (\,\alpha=1,\ldots,N\,).$$

運動エネルギー

$$T:=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} m_i\left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}\right\|^2=\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t}$$

を用いて書き直すと，

幾何学的運動方程式 (2)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^\alpha}=\mathscr{F}_\alpha \quad (\,\alpha=1,\ldots,N\,),$$

$\ast$ 偏微分の際，(q^α) と $(\dot{q}^\alpha)$ は互いに独立な変数とみなす．

Lagrange 運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = \mathscr{F}_\alpha \quad (\, \alpha = 1, \ldots, N \,),$$

とくに外力が保存力（ポテンシャル $U(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_{N_{\text{particle}}}, t)$）である場合，

$$\boldsymbol{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial U}{\partial y_i}, \frac{\partial U}{\partial z_i}\right),$$

$$\mathscr{F}_\alpha = \sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} = -\sum_{i=1}^{N_{\text{particle}}} \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial q^\alpha},$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial q^\alpha} = 0 \quad (\, \alpha = 1, \ldots, N \,).$$

ポテンシャル U は $(\dot{q}^\alpha)$ を陽に (explicitly) 含まないことに注意すると…

Lagrange 運動方程式

Lagrange 運動方程式：一般座標 (q^α) で表した運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,),$$

Lagrangian $\quad L(q, \dot{q}, t) := T(q, \dot{q}, t) - U(q, t)$

$\qquad = $ 運動エネルギー $-$ ポテンシャル.

$*$ 偏微分において (q^α) と $(\dot{q}^\alpha)$ は互いに独立な変数とみなす.

Lagrange 運動方程式

Lagrange 運動方程式：一般座標 (q^α) で表した運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,),$$

$$\text{Lagrangian} \quad L(q, \dot{q}, t) := T(q, \dot{q}, t) - U(q, t)$$
$$= \text{運動エネルギー} - \text{ポテンシャル}.$$

$*$ 偏微分において (q^α) と $(\dot{q}^\alpha)$ は互いに独立な変数とみなす．

左辺は共変ベクトルである．（証明は「補遺」参照）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}^\alpha}\right) - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial Q^\alpha} = \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\beta}\right\}\frac{\partial q^\beta}{\partial Q^\alpha} \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,),$$

$$\widetilde{L}(Q, \dot{Q}, t) := L(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t).$$

Lagrange 運動方程式

Lagrange 運動方程式：一般座標 (q^α) で表した運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,),$$

$$\begin{aligned} \text{Lagrangian} \quad L(q, \dot{q}, t) &:= T(q, \dot{q}, t) - U(q, t) \\ &= \text{運動エネルギー} - \text{ポテンシャル}. \end{aligned}$$

$*$ 偏微分において (q^α) と $(\dot{q}^\alpha)$ は互いに独立な変数とみなす．

左辺は共変ベクトルである．（証明は「補遺」参照）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}^\alpha}\right) - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial Q^\alpha} = \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\beta}\right\}\frac{\partial q^\beta}{\partial Q^\alpha} \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,),$$

$$\widetilde{L}(Q, \dot{Q}, t) := L(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t).$$

座標 (q^α) について Lagrange 運動方程式が成立する．$\to$ 座標 (Q^α) についても成立する．

Lagrange 運動方程式：例

1 質点系，Cartesian 座標（デカルト座標）

- 一般座標：Cartesian 座標 x, y, z．

$$\text{Lagrangian} \quad L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - U(x, y, z, t).$$

- Lagrange 運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

y, z についても同様．Lagrange 運動方程式は次の通り：

$$m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad m\ddot{y} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad m\ddot{y} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

従来の Newton 運動方程式を再び得る．

Lagrange 運動方程式：例

中心力を受けて二次元運動をする 1 質点系．

- 一般座標：極座標 r, θ

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - U(r, t).$$

Lagrangian L を一般座標 r, θ で書き直す．

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta,$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\left\{\left(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\right)^2 + \left(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\right)^2\right\} \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right), \\ U &= U(r, t), \end{aligned}$$

$$\therefore \quad L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - U(r, t).$$

Lagrange 運動方程式：例

中心力を受けて二次元運動をする 1 質点系（続）．

- Lagrange 運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,$$

$$\text{with} \quad L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - U(r,t).$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\theta}\right), \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0.$$

ゆえに，次の運動方程式（Lagrange 運動方程式）を得る：

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta} + \frac{\partial U}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0 \quad \text{角運動量保存則.}$$

今回の内容

まとめ

- 解析力学：力学を次の観点から学んでみる．
  - 不変性（共変性）．
  - 幾何学性．
- d'Alembert の原理→幾何学的運動方程式→ Lagrange 運動方程式．
  - 共変性をもつ運動方程式．

数学的観点から解析力学を論じた書籍．

- V. I. アーノルド（訳：安藤韶一，蟹江幸博，丹羽敏雄），古典力学の数学的方法，岩波書店（1980 年）．
- 山本義隆，中村孔一，解析力学 I，II，朝倉書店（1998 年）．

今回の内容

補遺：Christoffel の記号の変換則

$$\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu} \frac{\partial Q^{\alpha}}{\partial q^{\kappa}} \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial Q^{\beta}} \frac{\partial q^{\mu}}{\partial Q^{\gamma}} + \frac{\partial Q^{\alpha}}{\partial q^{\rho}} \frac{\partial^2 q^{\rho}}{\partial Q^{\beta} \partial Q^{\gamma}}.$$

【証明】まず，$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ に対する変換則を求める．以下の座標 (Q^{α}) による Christoffel の記号の表式，および，計量テンソルの変換則を用いる．

$$\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \widetilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial Q^{\gamma}} + \frac{\partial \widetilde{g}_{\alpha\gamma}}{\partial Q^{\beta}} - \frac{\partial \widetilde{g}_{\beta\gamma}}{\partial Q^{\alpha}} \right), \quad \widetilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\kappa\lambda} \frac{\partial q^{\kappa}}{\partial Q^{\alpha}} \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial Q^{\beta}}.$$

$$\frac{\partial \widetilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial Q^{\gamma}} = \frac{\partial}{\partial Q^{\gamma}} \left(g_{\kappa\lambda} \frac{\partial q^{\kappa}}{\partial Q^{\alpha}} \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial Q^{\beta}} \right) = \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial Q^{\gamma}} \frac{\partial q^{\kappa}}{\partial Q^{\alpha}} \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial Q^{\beta}} + g_{\kappa\lambda} \left(\frac{\partial^2 q^{\kappa}}{\partial Q^{\alpha} \partial Q^{\gamma}} \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial Q^{\beta}} + \frac{\partial^2 q^{\lambda}}{\partial Q^{\beta} \partial Q^{\gamma}} \frac{\partial q^{\kappa}}{\partial Q^{\alpha}} \right),$$

$$\frac{\partial \widetilde{g}_{\alpha\gamma}}{\partial Q^{\beta}} = \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial Q^{\beta}} \frac{\partial q^{\kappa}}{\partial Q^{\alpha}} \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial Q^{\gamma}} + g_{\kappa\lambda} \left(\frac{\partial^2 q^{\kappa}}{\partial Q^{\alpha} \partial Q^{\beta}} \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial Q^{\gamma}} + \frac{\partial^2 q^{\lambda}}{\partial Q^{\beta} \partial Q^{\gamma}} \frac{\partial q^{\kappa}}{\partial Q^{\alpha}} \right),$$

$$\frac{\partial \widetilde{g}_{\beta\gamma}}{\partial Q^{\alpha}} = \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial Q^{\alpha}} \frac{\partial q^{\kappa}}{\partial Q^{\beta}} \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial Q^{\gamma}} + g_{\kappa\lambda} \left(\frac{\partial^2 q^{\kappa}}{\partial Q^{\alpha} \partial Q^{\beta}} \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial Q^{\gamma}} + \frac{\partial^2 q^{\lambda}}{\partial Q^{\alpha} \partial Q^{\gamma}} \frac{\partial q^{\kappa}}{\partial Q^{\beta}} \right).$$

(第 1 式 + 第 2 式 − 第 3 式) $\div 2$ をつくって，

補遺：Christoffel の記号の変換則

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial Q^\gamma}\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} + \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial Q^\beta}\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\gamma} - \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\beta}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\gamma}\right) + g_{\kappa\lambda}\frac{\partial^2 q^\lambda}{\partial Q^\beta \partial Q^\gamma}\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial q^\mu} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial q^\kappa}\right)\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma} + g_{\kappa\lambda}\frac{\partial^2 q^\lambda}{\partial Q^\beta \partial Q^\gamma}\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha}, \\
&\therefore \quad \widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\kappa\lambda\mu}\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma} + g_{\kappa\lambda}\frac{\partial^2 q^\lambda}{\partial Q^\beta \partial Q^\gamma}\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha}.
\end{aligned}
$$

$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ **の変換則を** $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = g^{\alpha\delta}\Gamma_{\delta\beta\gamma}$ **と** $\widetilde{g}^{\alpha\beta} = g^{\kappa\lambda}\dfrac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa}\dfrac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda}$ **を用いて求める．**

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \widetilde{g}^{\alpha\delta}\widetilde{\Gamma}^\delta_{\beta\gamma} &= g^{\rho\sigma}\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\rho}\frac{\partial Q^\delta}{\partial q^\sigma}\left(\Gamma_{\kappa\lambda\mu}\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\delta}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma} + g_{\kappa\lambda}\frac{\partial^2 q^\lambda}{\partial Q^\beta \partial Q^\gamma}\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\delta}\right) \\
&= \underbrace{g^{\rho\kappa}\Gamma_{\kappa\lambda\mu}}_{\Gamma^\rho_{\lambda\mu}}\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\rho}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma} + \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa}\frac{\partial^2 q^\kappa}{\partial Q^\beta \partial Q^\gamma}.
\end{aligned}
$$

■

補遺：幾何学的運動方程式の共変性

$$\frac{\mathrm{d}^2 Q^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}Q^\beta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}Q^\gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa}\left(\frac{\mathrm{d}^2 q^\kappa}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\kappa_{\lambda\mu}\frac{\mathrm{d}q^\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q^\mu}{\mathrm{d}t}\right).$$

【証明】

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 Q^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}Q^\beta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}Q^\gamma}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}q^\kappa}{\mathrm{d}t}\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa}\right) + \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}q^\kappa}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q^\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\kappa}\frac{\partial Q^\gamma}{\partial q^\lambda} \\
&= \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa}\frac{\mathrm{d}^2 q^\kappa}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}q^\kappa}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q^\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^2 Q^\alpha}{\partial q^\kappa \partial q^\lambda} + \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}q^\kappa}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q^\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\kappa}\frac{\partial Q^\gamma}{\partial q^\lambda} \\
&= \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa}\frac{\mathrm{d} q^\kappa}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}q^\kappa}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q^\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\mu}\left(\widetilde{\Gamma}^\delta_{\beta\gamma}\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\delta}\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\kappa}\frac{\partial Q^\gamma}{\partial q^\lambda} + \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\delta}\frac{\partial^2 Q^\delta}{\partial q^\kappa \partial q^\lambda}\right) \\
&= \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa}\frac{\mathrm{d}^2 q^\kappa}{\mathrm{d}t^2} + \widetilde{\Gamma}^\mu_{\kappa\lambda}\frac{\mathrm{d}q^\kappa}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q^\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\mu} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa}\left(\frac{\mathrm{d}^2 q^\kappa}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\kappa_{\lambda\mu}\frac{\mathrm{d}q^\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q^\mu}{\mathrm{d}t}\right).
\end{aligned}$$

■

補遺：Lagrange 運動方程式の共変性

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}^\alpha}\right) - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial Q^\alpha} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\kappa}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\kappa}\right]\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha}, \quad \widetilde{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q), \dot{q}(Q, \dot{Q}), t).$$

【証明】

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}^\alpha}\right) - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial Q^\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\kappa}\frac{\partial \dot{q}^\kappa}{\partial \dot{Q}^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q^\kappa}\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\kappa}\frac{\partial \dot{q}^\kappa}{\partial Q^\alpha}\right). \tag{1}$$

$\dot{q}^\kappa = \frac{\mathrm{d}q^\kappa(Q)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha}\dot{Q}^\alpha$ **より** $\frac{\partial \dot{q}^\kappa}{\partial \dot{Q}^\alpha} = \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha}$ **であるから，**

$$\begin{aligned}(1) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\kappa}\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q^\kappa}\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\kappa}\frac{\partial \dot{q}^\kappa}{\partial Q^\alpha}\right) \\ &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\kappa}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\kappa}\right]\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\kappa}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha}\right) - \frac{\partial \dot{q}^\kappa}{\partial Q^\alpha}\right].\end{aligned} \tag{2}$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha}\right) = \frac{\partial^2 q^\kappa}{\partial Q^\alpha \partial Q^\beta}\dot{Q}^\beta = \frac{\partial \dot{q}^\kappa}{\partial Q^\alpha}$ **であるから，**(2) $= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\kappa}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\kappa}\right]\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha}$.