Date 2022 12 1(木)

解析力学.

拘束を受けた質点系の運動.

N_p 個の質点: 質量 $m_1, \dots, m_{N_p}$, 位置 $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_p}$

外力(束縛力以外) $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{N_p}$.

束縛力: $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_{N_p}$

N particle のつもり

運動方程式 $m_i \dfrac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i + \mathbf{S}_i \quad (i = 1, \dots, N_p)$.

~~例 1質点の平面内の運動~~

拘束条件 N_c.

物理系の自由度 $N := 3N_p - N_c$. …独立にとれるパラメータの数.

$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q^1, \dots, q^N)$.

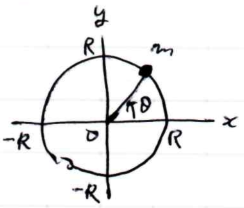
$q^1, \dots, q^N$: 一般座標.

例 1質点の平面内の運動.

$N_p = 1$, 拘束条件 $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$. $N_c = 2$, 自由度 $N = 3 \times 1 - 2 = 1$.

$x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$.

一般座標 θ

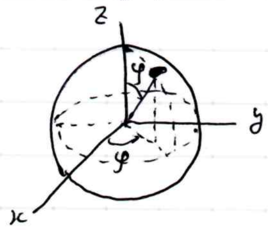


1質点の球面上の運動

$N_p = 1$, 拘束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. $N_c = 1$, 自由度 $N = 3 \times 1 - 1 = 2$

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta\cos\varphi \end{cases}$$

一般座標 θ, φ



Newton運動方程式: 座標系のとり方で表現が変わる.

1質点の2次元運動(ポテンシャル V)

Descartes座標

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \cancel{F_x + \partial x}, -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \cancel{F_y + \partial y}, -\dfrac{\partial V}{\partial y} \end{cases}$$

極座標

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = -\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Lagrange運動方程式 …座標系の選び方に依らない運動方程式

↑

変分原理: δ(作用) $= 0$

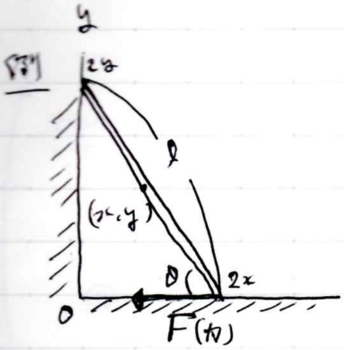
〈静力学〉

仮想仕事の原理

質点系がつり合い状態にあるとき、拘束条件下で系を微小に変位させたとき、(束縛力以外の)外力が系になす仕事はゼロである。

$$\sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad \delta \mathbf{r}_1, \cdots, \delta \mathbf{r}_{N_p} : \text{束縛状態に従う微小変位}.$$

例



長さl, 質量mの棒、つり合いの位置における角度θは?

(解) 棒の重心の位置 $x = \frac{l}{2}\cos\theta$, $y = \frac{l}{2}\sin\theta$.

微小変位で外力Fと重力がする仕事

$$-F\,\delta(2x) - mg\,\delta y = 0.$$

$$\delta x = -\frac{l}{2}\sin\theta\,\delta\theta, \quad \delta y = \frac{l}{2}\cos\theta\,\delta\theta$$

$$l\sin\theta \cdot F\,\delta\theta - \frac{l}{2} mg\cos\theta\,\delta\theta = 0.$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{2mg}{F}.$$

⊠

〈動力学〉

d'Alembertの原理

質点系が拘束条件下で運動しているとき、系に拘束条件に従う微小変位を施したときの(束縛力以外の)外力と慣性力が系になす仕事はゼロである:

$$\sum_{i=1}^{N_p}\left(m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} - \mathbf{F}_i\right)\cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad \delta \mathbf{r}_1, \cdots, \delta \mathbf{r}_{N_p} \text{ 束縛条件に従う微小変位}.$$

□

これを一般座標を用いて書き直す。

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q) = \mathbf{r}_i(q^1, \cdots, q^N).$$

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\alpha=1}^{N} \dot{q}^\alpha \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \Rightarrow \dot{q}^\alpha \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha},$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{\alpha=1}^{N} \ddot{q}^\alpha \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}$$

$$\Rightarrow \ddot{q}^\alpha \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} + \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}$$

Einsteinの規約

ギリシャ文字の添字(一般座標のラベル)が上下に同じものが現れた場合、その添字について和をとることとする。

2022 12 1 (木)

ここで $g_{\alpha\beta} := \sum_{i=1}^{N_p} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta}$.

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha .$$

$$0 = \sum_{i=1}^{N_p}\left(m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} - \mathbf{F}_i\right)\cdot\delta \mathbf{r}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N_p}\left[m_i\left(\frac{d^2 q^\alpha}{dt^2}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} + \frac{dq^\alpha}{dt}\frac{dq^\beta}{dt}\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha\partial q^\beta}\right) - \mathbf{F}_i\right]\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\gamma}\delta q^\gamma .$$

$$= \left[\frac{d^2 q^\alpha}{dt^2}\left(\sum_{i=1}^{N_p} m_i\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\gamma}\right) + \frac{dq^\alpha}{dt}\frac{dq^\beta}{dt}\sum_{i=1}^{N_p} m_i\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha\partial q^\beta}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\gamma} - \sum_{i=1}^{N_p}\mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\gamma}\right]\delta q^\gamma$$

最右辺 $=0$ が任意の独立な微小量 $\delta q^1, \dots, \delta q^N$ について成り立つから、

$$g_{\alpha\gamma}\frac{d^2 q^\alpha}{dt^2} + \left(\sum_{i=1}^{N_p} m_i \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha\partial q^\beta}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\gamma}\right)\frac{dq^\alpha}{dt}\frac{dq^\beta}{dt} - \sum_{i=1}^{N_p}\mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\gamma} = 0 . \quad \text{—①}$$

$(\gamma = 1, \dots, N)$.

$[g^{\alpha\beta}]$: $[g_{\alpha\beta}]$ の逆行列, i.e., $g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma = \begin{cases} 1 & (\alpha=\gamma) \\ 0 & (\alpha\neq\gamma) \end{cases}$,

$g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha$.

①の両辺に $g^{\delta\gamma}$ を掛けて γ について和をとる(Einsteinの規約)と、

$$\underbrace{\underbrace{g^{\delta\gamma}g_{\alpha\gamma}}_{\delta^\delta_\alpha}\frac{d^2 q^\alpha}{dt^2}}_{\frac{d^2 q^\delta}{dt^2}} + \underbrace{g^{\delta\gamma}\left(\sum_{i=1}^{N_p} m_i\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha\partial q^\beta}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\gamma}\right)}_{②}\frac{dq^\alpha}{dt}\frac{dq^\beta}{dt} = g^{\delta\gamma}\sum_{i=1}^{N_p}\mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\gamma}$$

②を変形する。

$g_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N_p} m_i\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta}$. 両辺を q^γ で微分して、

$$\sum_{i=1}^{N_p} m_i\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta\partial q^\gamma} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\gamma\partial q^\alpha}\right) = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} \quad \text{—(i)}$$

添字の入れ換えにより

$$\sum_{i=1}^{N_p} m_i\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\gamma\partial q^\alpha} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\gamma}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha\partial q^\beta}\right) = \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} . \quad \text{—(ii)}$$

$$\sum_{i=1}^{N_p} m_i\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\gamma}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^\alpha\partial q^\beta} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta\partial q^\gamma}\right) = \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} . \quad \text{—(iii)}$$

$\frac{1}{2}\times((\text{ii})+(\text{iii})-(\text{i}))$

$$\sum_{i=1}^{N_p} m_i\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\gamma}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha\partial q^\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}\right)$$

$$\Gamma^\delta_{\alpha\beta} := g^{\delta\gamma}\sum_{i=1}^{N_p} m_i\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\gamma}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha\partial q^\beta} = \frac{1}{2}g^{\delta\gamma}\left(\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}\right).$$

幾何学的運動方程式（一般的名称ではない）

$$\frac{d^2 q^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dq^\beta}{dt}\frac{dq^\gamma}{dt} = f^\alpha \quad (\alpha=1,\dots,N). \qquad —Ⓐ$$

ここで

$g_{\alpha\beta} := \sum_{i=1}^{N_p} m_i \frac{\partial r_i}{\partial q^\alpha}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q^\beta}$, $[g^{\alpha\beta}]$: $[g_{\alpha\beta}]$ の逆行列.

$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} := \frac{1}{2} g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial q^\gamma}+\frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial q^\beta}-\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\delta}\right)$. … Christoffelの記号.

(rev. 測地線方程式 $\frac{d^2u^i}{ds^2}+\sum_{k,l}\Gamma^i_{kl}\frac{du^k}{ds}\frac{du^l}{ds}=0$

$\Gamma^i_{kl}=\frac{1}{2} g^{ij}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^j}\right)$.

($g_{ij}=\frac{\partial r}{\partial u^i}\cdot\frac{\partial r}{\partial u^j}$, $[g^{ij}]$: $[g_{ij}]$ の逆行列),)

$f^\alpha := g^{\alpha\beta}\sum_{i=1}^{N_p} F_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q^\beta}$ 一般化力.
（通常の教科書とは定義が若干違う）

運動方程式Ⓐの特徴 … 座標変換 $(q^1,\dots,q^N)\to(Q^1,\dots,Q^N)$ で不変.
i.e., 別の一般座標 $Q^1,\dots,Q^N$ でも次が成り立つ:

$$\frac{d^2Q^\alpha}{d\tau^2}+\tilde\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dQ^\beta}{dt}\frac{dQ^\gamma}{dt}=\tilde f^\alpha \quad (\alpha=1,\dots,N)$$

$\tilde\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, $\tilde f^\alpha$: 一般座標(Q^α)を用いて定義されたChristoffel記号, 一般化力.

というのは….
Ⓐ両辺は反変ベクトル場の成分であるからである.

反変ベクトル場の成分 $X^\alpha(x^1,\dots,x^N)$
… 座標変換 $(q^1,\dots,q^N)\to(Q^1,\dots,Q^N)$に対して次のように変換する量の組:

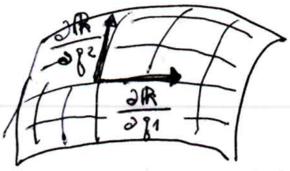
$$X^\alpha\to\tilde X^\alpha=\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta}X^\beta \quad (\alpha=1,\dots,N).$$

$\mathbb{R}=(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\dots,x_{N_p},y_{N_p},z_{N_p})\in\mathbb{R}^{3N_p}$

$\mathbb{X}:=X^\alpha\frac{\partial\mathbb{R}}{\partial q^\alpha}$ とおくと, $\tilde X^\alpha\frac{\partial\mathbb{R}}{\partial Q^\alpha}=X^\beta\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta}\frac{\partial\mathbb{R}}{\partial Q^\alpha}=X^\beta\frac{\partial\mathbb{R}}{\partial q^\beta}$.

No. 8

Date 2022 12 1 (木)



・運動曲面上で観測したとき、物理的に意味のある加速度、力の成分

(X^α) は物理系の運動曲面 $\{R(q^1,\dots,q^N) \mid (q^1,\dots,q^N)\in D\}$ $(D\subset \mathbb{R}^N)$ の上の接ベクトル場の成分として well-defined である。

$$A^\alpha := \frac{d^2 q^\alpha}{dt^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dq^\beta}{dt}\frac{dq^\gamma}{dt}$$ "幾何学的な"加速度。

$$F^\alpha := \sum_{i=1}^{N_p} F_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q^\alpha}$$

変換則 $A^\alpha \to \tilde{A}^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta}A^\beta$, $F^\alpha \to \tilde{F}^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta}F^\beta$. ―(B)

〈(B)の証明〉 まず、計量テンソル $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ は次の変換則に従う。

$$g_{\alpha\beta} \to \tilde{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}g_{\mu\lambda}$$

$$g^{\alpha\beta} \to \tilde{g}^{\alpha\beta} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\mu}\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda}g^{\mu\lambda}.$$

$$\Big(\because\ \tilde{g}_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N_p} m_i \frac{\partial r_i}{\partial Q^\alpha}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial Q^\beta} = \sum_{i=1}^{N_p} m_i\left(\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial r_i}{\partial q^\mu}\right)\cdot\left(\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}\frac{\partial r_i}{\partial q^\lambda}\right)$$

$$= \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}\left(\sum_{i=1}^{N_p} m_i\frac{\partial r_i}{\partial q^\mu}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q^\lambda}\right) = \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}g_{\mu\lambda}.$$

$$\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\mu}\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda}g^{\mu\lambda}\tilde{g}_{\beta\gamma} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\mu}\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda}g^{\mu\lambda}\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\beta}\frac{\partial q^\nu}{\partial Q^\gamma}g_{\kappa\nu}$$

$$= \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\mu}\underbrace{\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda}\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\beta}}_{\frac{\partial q^\kappa}{\partial q^\lambda}=\delta^\kappa_\lambda}\frac{\partial q^\nu}{\partial Q^\gamma}g^{\mu\lambda}g_{\kappa\nu} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\mu}\frac{\partial q^\nu}{\partial Q^\gamma}\underbrace{g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu}}_{\delta^\mu_\nu}$$

$$= \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\mu}\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial Q^\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$$

より $\left[\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\mu}\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda}g^{\mu\lambda}\right]$ は $[\tilde{g}_{\alpha\beta}]$ の逆行列である。∴ $\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\mu}\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda}g^{\mu\lambda} = \tilde{g}^{\alpha\beta}$ □

$$\tilde{F}^\alpha = \tilde{g}^{\alpha\beta}\sum_{i=1}^{N_p}F_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial Q^\beta} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\mu}\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda}g^{\mu\lambda}\sum_{i=1}^{N_p}F_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q^\gamma}\frac{\partial q^\gamma}{\partial Q^\beta}$$

$$= \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\mu}\underbrace{\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda}\frac{\partial q^\gamma}{\partial Q^\beta}}_{\frac{\partial q^\gamma}{\partial q^\lambda}=\delta^\gamma_\lambda}g^{\mu\lambda}\sum_{i=1}^{N_p}F_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q^\gamma} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\mu}g^{\mu\gamma}\sum_{i=1}^{N_p}F_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q^\gamma}$$

$$= \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\mu}F^\mu.$$ □