6

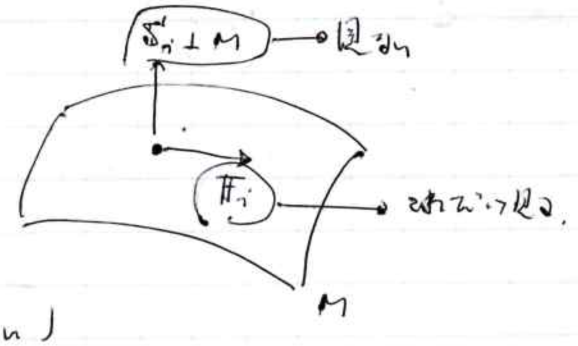
2022 12 4(日)

解析力学.

運動空間 $M = \{\mathbf{r}(q^1,\dots,q^N)\in\mathbb{R}^{3N_p} \mid (q^1,\dots,q^N)\in D\}$.

$\mathbf{r}=(x_1,y_1,z_1,\dots,x_{N_p},y_{N_p},z_{N_p})$,

$D\subset\mathbb{R}^N$.




Newton 運動方程式

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i + \mathbf{S}_i$$

束縛力 ⊥ M.

解析力学では"見ない"(見たくない)

$\mathbf{F}_i$ : M の接ベクトル

力(ベクトル場)としては M の接ベクトル場のみ眼中に入れる.
考察の対象とする.

接ベクトル場 $\mathbb{X}$ … 一般座標$(q^1,\dots,q^N)$ を用いて次のように書ける.

$$\mathbb{X} = X^\alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} = X^1 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1}+\dots+X^N\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^N}.$$

別の一般座標$(Q^1,\dots,Q^N)$を使って、次のように表せるとする.

$$\mathbb{X}=\tilde X^\alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial Q^\alpha}=\tilde X^1\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial Q^1}+\dots+\tilde X^N\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial Q^N}.$$

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha}=\frac{\partial Q^\mu}{\partial q^\alpha}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial Q^\mu}$ より $X^\alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} = X^\alpha \frac{\partial Q^\mu}{\partial q^\alpha}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial Q^\mu}=\tilde X^\mu\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial Q^\mu}$.

$$\therefore \boxed{\tilde X^\mu = \frac{\partial Q^\mu}{\partial q^\alpha}X^\alpha \quad (\mu=1,\dots,N).} \text{ —— Ⓐ}$$

(接)ベクトル場の成分は座標変換$(q^\alpha)\to(Q^\alpha)$においてⒶのように変換する.

$\boxed{\text{反変ベクトル場の成分：N個の値の組}(X^1,\dots,X^N)\text{が座標変換における変換 }X^\alpha\to\tilde X^\alpha\text{ がⒶに従うもの.}}$

物理的に本質なもの.

"幾何学的"運動方程式 $\frac{Dv^\alpha}{dt} := \frac{d^2q^\alpha}{dt^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dq^\beta}{dt}\frac{dq^\gamma}{dt} = f^\alpha$ $\left(v^\alpha=\frac{dq^\alpha}{dt}\right)$

$\left(\frac{Dv^\alpha}{dt}\right)$, $(f^\alpha)$ が M上の力学において本質的な量であるらしい.

$\left(\frac{Dv^\alpha}{dt}\right)$ が M上の加速度と見なせる (…… $v^\alpha$ の"共変微分")

2022 12 4 (日)

（解析力学に戻る）

Lagrange 運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1, \cdots, N) . \quad \text{— Ⓐ}$$

$L = T - V$ Lagrangian,

$T = \sum_{i=1}^{N_p} \frac{m_i}{2} \left\| \frac{d r_i}{dt} \right\|^2 = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta$ 運動エネルギー

$V = V(q, t)$ ポテンシャル.

これは次の変分問題に対する Euler-Lagrange 方程式である.

> **Hamiltonの原理**
> 物理系は次の"作用"を停留にする（$\delta S = 0$）ような軌道（$q^\alpha(t)$）をとって運動する：
> 作用 $S[q] := \int_{t_I}^{t_F} L\, dt$.
> 時間端点 $t = t_I, t_F$ における値 $q^\alpha(t_I), q^\alpha(t_F)$ を固定した上で

Lagrange 運動方程式 Ⓐ の左辺は"共変ベクトル"（の成分）である, i.e.,

$L$ : 一般座標（$q^\alpha$）を用いて定義された Lagrangian.

$\tilde{L}$ : 〃 （$Q^\alpha$） 〃

とすると,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}^\alpha}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q^\alpha} = \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\alpha}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\mu}\right].$$

→ だから Lagrange 運動方程式は座標のとり方によらず, 同じ形で成り立つ.

◆ 共変ベクトルの成分： N個の値の組（$\omega_1, \cdots, \omega_N$）で座標変換（$q^\alpha$）→（$Q^\alpha$）に際し次の変換則に従うもの：

$$\omega_\alpha \to \tilde{\omega}_\alpha = \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\alpha} \omega_\mu .$$

線型汎関数は座標のとり方に依存しない概念である.
→ 物理的に意味がある

… 何を意味するか？ → $\boxed{\text{接ベクトル場の線型汎関数}}$

i.e., 接ベクトル場 $\mathbb{X}(q)$ に対しスカラー関数 $\omega[\mathbb{X}] = \omega[\mathbb{X}](q)$ を対応させる写像 $\omega$ で次の線型性を満たすもの：

$$\omega[c_1 \mathbb{X}_1 + c_2 \mathbb{X}_2] = c_1 \omega[\mathbb{X}_1] + c_2 \omega[\mathbb{X}_2],$$

$c_1, c_2$ ：スカラー関数, $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$ ：接ベクトル場.

（スカラー関数：座標変換（$q^\alpha$）→（$Q^\alpha$）で不変な M 上の関数）

8

2022 12 4 (日)

$\left\{\frac{\partial}{\partial q^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial q^N}\right\}$ の双対基底 $\{dq^1, \cdots, dq^N\}$

… 次を満たす線型汎関数

$$dq^\alpha\left[\frac{\partial}{\partial q^\beta}\right] = \delta^\alpha_\beta = \begin{cases} 1 & (\alpha=\beta) \\ 0 & (\alpha\neq\beta) \end{cases}.$$

任意の線型汎関数 $\omega$ は次のように展開される:

$$\omega = \omega_\alpha dq^\alpha, \quad \omega_\alpha := \omega\left[\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\right].$$

∵ 任意の接ベクトル $\mathbb{X} = X^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha}$ に対し、

$$\omega[\mathbb{X}] = \omega\left[X^\alpha\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\right] = X^\alpha\omega\left[\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\right] = \omega_\alpha X^\alpha.$$ 一致する.

$$(\omega_\alpha dq^\alpha)[\mathbb{X}] = \omega_\alpha dq^\alpha\left[X^\beta\frac{\partial}{\partial q^\beta}\right] = \omega_\alpha X^\beta \underbrace{dq^\alpha\left[\frac{\partial}{\partial q^\beta}\right]}_{\delta^\alpha_\beta} = \omega_\alpha X^\alpha.$$

$\left\{\frac{\partial}{\partial Q^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial Q^N}\right\}$ の双対基底 $\{dQ^1, \cdots, dQ^N\}$ により線型汎関数 $\omega$ が $\omega = \tilde{\omega}_\alpha dQ^\alpha$ と展開されたとする。

$$\tilde{\omega}_\alpha = \omega\left[\frac{\partial}{\partial Q^\alpha}\right] = \omega\left[\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial}{\partial q^\mu}\right] = \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\alpha}\omega\left[\frac{\partial}{\partial q^\mu}\right] = \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\alpha}\omega_\mu.$$

$\therefore\ \tilde{\omega}_\alpha = \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\alpha}\omega_\mu$ … 共変ベクトル場成分の変換則.

* なぜ $\left\{\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\right\}$ の双対基底を $\{dq^\alpha\}$ と記すか?

~~$dQ^\alpha\left[\frac{\partial}{\partial Q^\beta}\right] = \delta^\alpha_\beta$ である,~~

~~$dQ^\alpha\left[\frac{\partial}{\partial Q^\beta}\right] = dQ^\alpha\left[\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\beta}\frac{\partial}{\partial q^\mu}\right] = \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\beta} dQ^\alpha\left[\frac{\partial}{\partial q^\mu}\right]$~~

$$dQ^\alpha\left[\frac{\partial}{\partial q^\mu}\right] = dQ^\alpha\left[\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\mu}\frac{\partial}{\partial Q^\beta}\right] = \frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\mu}dQ^\alpha\left[\frac{\partial}{\partial Q^\beta}\right] = \frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\mu}\delta^\alpha_\beta = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\mu}$$

$$\therefore\quad dQ^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\mu}dq^\mu$$

… これは微積分における全微分の公式 $df = \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial q^\alpha}dq^\alpha$ と形が一致する。 //

( * $\omega = \omega_\alpha dq^\alpha$ …「微分1形式」または「1形式」とよぶ )

2022 12 4(日)

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}$ が共変ベクトル場の成分であることの証明.

(作用 $I = \int L\,dt$ はスカラーであり, $\delta I$ もスカラーである. そして

$$\delta I = \int_{t_I}^{t_F} \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)\right] \delta q^\alpha\, dt = \int_{t_I}^{t_F} \left[\frac{\partial L}{\partial Q^\mu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^\mu}\right)\right] \delta Q^\mu\, dt$$

であるから,

$$\left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)\right] \delta q^\alpha = \left[\frac{\partial L}{\partial Q^\mu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^\mu}\right)\right] \delta Q^\mu .$$

$\delta q^\alpha = \frac{\partial q^\alpha}{\partial Q^\mu} dQ^\mu$ より $\frac{\partial L}{\partial Q^\mu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^\mu}\right) = \frac{\partial q^\alpha}{\partial Q^\mu}\left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)\right]$. ☒

* $\frac{\delta I}{\delta q^\alpha} := \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)$ … $I = \int_{t_I}^{t_F} L\, dt$ の汎関数微分.

すなわち, $\delta I = \int_{t_I}^{t_F} \frac{\delta I}{\delta q^\alpha} \delta q^\alpha\, dt$

(通常の関数 $f(x_1, \dots, x_m)$ に対し $\delta f = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} \delta x^i$.)

積分は和の極限

//

<Lagrange 運動方程式の例.>

1° 一粒子の平面運動(中心力を受ける), 極座標 $(r, \theta)$ を用いる.

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,$

$L = T - V,\quad T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),\quad V = V(r)$ ($\theta$ を含まない)

運動エネルギー $T$ を $r, \theta$ で表わす.

$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta,\quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta,$

$T = \frac{m}{2}[(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)^2] = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r).$$

Lagrange 運動方程式

① $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$, ② $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$.

$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r},\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ より ① → $m\ddot{r} = \underbrace{mr\dot{\theta}^2}_{\text{遠心力}} - \frac{\partial V}{\partial r}$.

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$ より ② → $\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$ → $mr^2\dot{\theta} = \text{const}$.

角運動量保存則.

1

2022 12 9 (金)

(応用解析学特論)

双対空間

$V$ : ($\mathbb{R}$ 上) ベクトル空間

$V$ 上の線型汎関数 $f$ … $\mathbb{R}$-線型写像 $f : V \to \mathbb{R}$

(コベクトル co-vector)　　$f(au + bv) = af(u) + bf(v)$

$(\forall a, b \in \mathbb{R}, \ \forall u, v \in V)$

$$\boxed{V \text{ の双対空間 } V^* := \{ V \text{上の線型汎関数} \}.}$$

$V^*$ は ($\mathbb{R}$ 上) ベクトル空間である.

( ∵ $f, g \in V^*$, $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow af + bg \in V^*$ を言えばよい.

写像 $af + bg$ を次で定義する.

$(af + bg)(u) := af(u) + bg(u) \quad (u \in V)$.

$af + bg \in V^*$, i.e., $af + bg$ が線型汎関数であることを示せばよい.

$$(af + bg)(c_1 u_1 + c_2 u_2) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \ u_1, u_2 \in V)$$
$$= af(c_1 u_1 + c_2 u_2) + bg(c_1 u_1 + c_2 u_2)$$
$$= a[c_1 f(u_1) + c_2 f(u_2)] + b[c_1 g(u_1) + c_2 g(u_2)]$$
$$= c_1[af(u_1) + bg(u_1)] + c_2[af(u_2) + bg(u_2)]$$
$$= c_1(af + bg)(u_1) + c_2(af + bg)(u_2). \quad \boxtimes \ )$$

$V$ の基底 $\{e_1, \dots, e_N\}$ $(N = \dim V)$ をとり, $u \in V$ を $u = u^\alpha e_\alpha$ と表す.

Einsteinの規約　$u^\alpha e_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} u^\alpha e_\alpha$

$\{e_1, \dots, e_N\}$ の双対基底 $\{(e^*)^1, \dots, (e^*)^N\}$

…次を満たす線型汎関数 ($V^*$ の元)

$$(e^*)^\alpha(e_\beta) = \delta^\alpha_\beta := \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta) \end{cases}$$ … Kroneckerのdelta

($u = u^\alpha e_\alpha \in V$, $f \in V^*$ に対し

$$f(u) = f(u^\alpha e_\alpha) = u^\alpha f(e_\alpha).$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f = f_\alpha (e^*)^\alpha, \quad f_\alpha := f(e_\alpha)} \longrightarrow \boxed{u = u^\alpha e_\alpha \in V, \ f = f_\beta (e^*)^\beta \in V^* \text{ に対し } f(u) = f_\alpha u^\alpha.}$$

∵ $f(u) = [f_\alpha (e^*)^\alpha](u)$ $(\forall u \in V)$ を示せばよい. これは, $f$, $f_\alpha (e^*)^\alpha$ の線型性より $f(e_\beta) = [f_\alpha (e^*)^\alpha](e_\beta)$ $(\beta = 1, \dots, N)$ を示せばよい.

$$[f_\alpha (e^*)^\alpha](e_\beta) = f_\alpha \cdot (e^*)^\alpha (e_\beta) = f_\alpha \delta^\alpha_\beta = f_\beta = f(e_\beta).$$ ⊠

V の基底の変換 $\{e_\alpha\} \to \{f_\alpha\}$, $f_\alpha = c^\beta{}_\alpha e_\beta$ (各 $c^\beta{}_\alpha \in \mathbb{R}$ )
$\{f_\alpha\}$ に対する双対基底を $\{(f^*)^\alpha\}$ とすると,

$$\delta^\alpha_\beta = (f^*)^\alpha (f_\beta) = (f^*)^\alpha (c^\gamma{}_\beta e_\gamma) = c^\gamma{}_\beta (f^*)^\alpha (e_\gamma). \quad —①$$

一方, 各 $(f^*)^\alpha \in V^*$ だから, $(f^*)^\alpha$ は $\{(e^*)^\alpha\}$ で展開されるはず, 前頁より

$(f^*)^\alpha = d^\alpha{}_\beta (e^*)^\beta$. $d^\alpha{}_\beta = (f^*)^\alpha (e_\beta)$.

①に代入し,

$$\delta^\alpha_\beta = c^\gamma{}_\beta\, d^\alpha{}_\varepsilon (e^*)^\varepsilon (e_\gamma) = c^\gamma{}_\beta\, d^\alpha{}_\varepsilon \delta^\varepsilon_\gamma = c^\gamma{}_\beta\, d^\alpha{}_\gamma.$$

$$\therefore\ d^\alpha{}_\gamma c^\gamma{}_\beta = \delta^\alpha_\beta.$$

$[d^\alpha{}_\gamma] = \begin{bmatrix} d^1{}_1 & \cdots & d^1{}_N \\ \vdots & & \vdots \\ d^N{}_1 & \cdots & d^N{}_N \end{bmatrix}$ は $[c^\gamma{}_\beta] = \begin{bmatrix} c^1{}_1 & \cdots & c^1{}_N \\ \vdots & & \vdots \\ c^N{}_1 & \cdots & c^N{}_N \end{bmatrix}$ の逆行列である.

---

基底変換 $\{e_\alpha\} \to \{f_\alpha\}$ に対し $u \in V$ の成分が $u = u^\alpha e_\alpha \to u = \tilde{u}^\alpha f_\alpha$ と変換するとすれば

$$u = \tilde{u}^\alpha f_\alpha = \tilde{u}^\alpha c^\beta{}_\alpha e_\beta$$
$$u = u^\beta e_\beta \quad \to u^\beta = c^\beta{}_\alpha \tilde{u}^\alpha.$$

$$\therefore\ \tilde{u}^\alpha = d^\alpha{}_\beta u^\beta$$

( ∵ $[d^\alpha{}_\beta]$ は $[c^\alpha{}_\beta]$ の逆行列 ).

線型汎関数 $\varphi \in V^*$ の成分の変換 ~~$f = f_\alpha (e^*)^\alpha \to f = \tilde{f}_\alpha (f^*)^\alpha$~~ は?

$\varphi = \varphi_\alpha (e^*)^\alpha \to \varphi = \tilde{\varphi}_\alpha (f^*)^\alpha$

$$\tilde{\varphi}_\alpha = \varphi(f_\alpha) = \varphi(c^\beta{}_\alpha e_\beta) = c^\beta{}_\alpha \varphi(e_\beta) = c^\beta{}_\alpha \varphi_\beta \quad \therefore\ \tilde{\varphi}_\alpha = c^\beta{}_\alpha \varphi_\beta.$$

ベクトル・線型汎関数 (コベクトル) の成分の変換

(ベクトル) $u^\alpha \to \tilde{u}^\alpha = d^\alpha{}_\beta u^\beta$

(線型汎関数) $\varphi_\alpha \to \tilde{\varphi}_\alpha = c^\beta{}_\alpha \varphi_\beta$

$[d^\alpha{}_\beta]$ と $[c^\alpha{}_\beta]$ は互いに逆行列の関係.