2022 12 22 (木)　　解析力学 講義ノート

* 一般に $\boxed{\text{汎関数微分は共変ベクトル場の成分となる}}$. i.e.,

$I = I[q] = \int_{t_I}^{t_F} F(t, q, \dot{q})\, dt$,　　F : スカラー(座標変換で不変な量)

$\tilde{I} = \tilde{I}[Q] = \int_{t_I}^{t_F} \tilde{F}(t, Q, \dot{Q})\, dt$,　　$\tilde{F}(t, Q, \dot{Q}) = F(t, q(Q), \dot{q}(Q, \dot{Q}))$

とすると、

$$\boxed{\frac{\delta \tilde{I}}{\delta Q^\alpha} = \frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha} \frac{\delta I}{\delta q^k}} \quad \left(\frac{\delta I}{\delta q^k} = \frac{\partial F}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^k}\right),\ \frac{\delta \tilde{I}}{\delta Q^\alpha} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Q^\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \dot{Q}^\alpha}\right) \right)$$

$$\because \frac{\delta \tilde{I}}{\delta Q^\alpha} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Q^\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \dot{Q}^\alpha}\right)$$

$$= \frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial F}{\partial q^k} + \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{Q}^\alpha}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^k}\right)$$

[$\dot{q}$ は $Q, \dot{Q}$ を含むが q は Q しか含まないことに注意]

ここで、 の時間微分をとると、

$$q^k = q^k(Q)$$

$$\frac{dq^k}{dt} = \frac{dQ^\alpha}{dt}\frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}, \quad \dot{q}^k = \frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}\dot{Q}^\alpha, \quad \text{——①}$$

$$\therefore \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{Q}^\alpha} = \frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}.$$

よって、

$$\frac{\delta \tilde{I}}{\delta Q^\alpha} = \frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial F}{\partial q^k} + \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^k}\right)$$

$$= \frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial F}{\partial q^k} + \underbrace{\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^k}}_{(1)} - \frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^k}\right) - \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}\right)\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^k}}_{(2)}$$

①より $\displaystyle \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial Q^\alpha} = \frac{\partial^2 q^k}{\partial Q^\alpha \partial Q^\beta}\dot{Q}^\beta$. また、

$\displaystyle \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}\right) = \frac{\partial^2 q^k}{\partial Q^\alpha \partial Q^\beta}\dot{Q}^\beta$.　よって、(1)と(2)は互いに打ち消し合う。

ゆえに

$$\frac{\delta \tilde{I}}{\delta Q^\alpha} = \frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^k}\right)\right) = \frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}\frac{\delta I}{\delta q^k}. \qquad \boxtimes$$

エネルギー保存則.

Lagrangian L が時刻 t に陽に依存しない場合：$L = L(q, \dot{q})$

$\Downarrow$

変分法の一般論より次の第1積分が保存する：

$$\dot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - L.$$

$$L = T - V, \quad T = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(q)\, \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta, \quad V = V(q).$$

$$\left(g_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N_p} m_i \frac{\partial r_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q^\beta} \right).$$

T は $\dot{q}^1, \cdots, \dot{q}^N$ の2次同次式である.

* 関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ は $x_1, \cdots, x_n$ の k 次同次式である.

$$\overset{\text{def}}{\iff} f(cx_1, \cdots, cx_n) = c^k f(x_1, \cdots, x_n). \quad \text{—①}$$

このとき, 次が成り立つ：

$$\sum_{i=1}^{n} x^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = kf. \quad \text{—②}$$

(∵ ①両辺を c で微分して,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_{x_i}(cx_1, \cdots, cx_n) = k c^{k-1} f(x_1, \cdots, x_n).$$

$$\left(f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

$c = 1$ とおいて ② を得る. ⊠)

したがって, $\dot{q}^\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} = 2T$. V は $\dot{q}^\alpha$ に陽に依存しないから,

$$\dot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - L = \dot{q}^\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - (T - V) = 2T - (T - V) = T + V.$$

…エネルギー.

∴ 第1積分はエネルギーである：

$$E = \dot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - L.$$

それに, エネルギー E は保存する：$\frac{dE}{dt} = 0$.

12 22(木)

例　N_p質点系、一般座標：直交座標 $(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_{N_p}, y_{N_p}, z_{N_p})$

$$L = \sum_{i=1}^{N_p} \frac{m_i}{2}(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_{N_p}, y_{N_p}, z_{N_p}).$$

$$E = \sum_{i=1}^{N_p} \left(\dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \dot{y}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} + \dot{z}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}\right) - L$$

$$= \sum_{i=1}^{N_p} (\dot{x}_i \cdot m_i \dot{x}_i + \dot{y}_i \cdot m_i \dot{y}_i + \dot{z}_i \cdot m_i \dot{z}_i) - \left\{ \sum_{i=1}^{N_p} \frac{m_i}{2}(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V \right\},$$

$$\therefore\ E = \sum_{i=1}^{N_p} \frac{m_i}{2}(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + V.$$　…通常のエネルギーの式

一般化運動量

座標 q^α に共役な一般運動量　$p_\alpha := \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}$.

一般運動量 p_α は共変ベクトル場の成分である：$P_\alpha = \dfrac{\partial q^\beta}{\partial Q^\alpha} p_\beta$

（P_α：新座標 (Q^α) を用いて定義された一般運動量）。

例　N_p質点系、一般座標：直交座標。

$$L = \sum_{i=1}^{N_p} \frac{m_i}{2}(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V(x_1, y_1, z_1, \cdots)$$

x_i に共役な一般運動量

$$p_{x_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i.$$

同様に y_i, z_i に共役な一般運動量は

$$p_{y_i} = m_i \dot{y}_i,\quad p_{z_i} = m_i \dot{z}_i$$

従来の運動量と一致する。

例　一質点の二次元運動、一般座標：極座標 (r, θ)

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(t, r, \theta).$$

r に共役な運動量 $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$

θ に共役な運動量 $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$ … 角運動量 □

循環座標

q^β は循環座標である $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ L は q^β を陽に含まない：

$$\frac{\partial L}{\partial q^\beta} = 0$$

Lagrange 運動方程式 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0$ と運動量の定義

$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}$ より

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}.$$

したがって、q^β が循環座標なら、$\frac{dp_\beta}{dt} = 0$、$p_\beta = \text{const}$.

$$\boxed{\text{循環座標に共役な運動量は保存する．(一般化された運動量保存則)}}$$

例 一般座標 = 直交座標 の場合．

$p_{x_i} = m_i \dot{x}_i$, $p_{y_i} = m_i \dot{y}_i$, $p_{z_i} = m_i \dot{z}_i$.

L が（すなわちポテンシャル V が）x_i を陽に含まない場合，

$p_{x_i} = m_i \dot{x}_i = \text{const}$. … 通常の運動量保存則．

例 (1質点の) 2次元運動，一般座標 = 極座標 の場合

$p_r = m\dot{r}$, $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$ (角運動量).

L が θ を陽に含まない場合，i.e., V が θ を陽に含まない場合

$V = V(r)$ → 中心力による運動．

↓

$p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \text{const}$. … 角運動量保存則

解析力学ではひとつの抽象化された運動量保存則に統合される．

2022 12 22(木)

$\boxed{\text{エネルギーは（ある意味）時間変数 } t \text{ に共役な運動量とみなせる。}}$

そのために、作用 $S=\int L\,dt$ を書き直す。仮想的な時間変数 τ ($\tau_I \le \tau \le \tau_F$) を導入し、$t=t(\tau)$ とおく。$q^\alpha(t)=q^\alpha(t(\tau))$。

$$S=\int_{t_I}^{t_F} L(t,q,\dot q)\,dt$$

$$=\int_{\tau_I}^{\tau_F} L(t(\tau),\, q(t(\tau)),\, \dot q(t(\tau)))\,\frac{dt}{d\tau}\,d\tau$$

$$=: \int_{\tau_I}^{\tau_F} \hat L(\tau, q, q')\,d\tau.$$

$$\hat L(\tau, q, q') = t' L(t, q, q'/t').$$

$$\left({}' = \frac{d}{d\tau},\quad \dot q^\alpha = \frac{dq^\alpha}{dt} = \frac{dq^\alpha/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{q^{\alpha\prime}}{t'} \text{ に注意} \right)$$

t に共役な運動量を上の Lagrangian $\hat L$ から求める。

$$p_\tau = \frac{\partial \hat L}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'}\left\{ t' L\left(t, q, \frac{q'}{t'}\right)\right\}$$

$$\cancel{= L + \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{q^{\alpha\prime}}{t'}\right)\partial L} = L + t'\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{q^{\alpha\prime}}{t'}\right)\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}$$

$$= L - \underbrace{\frac{q^{\alpha\prime}}{t'}}_{\frac{dq^\alpha/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{dq^\alpha}{dt} = \dot q^\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} = L - \dot q^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} = -E.$$

$$\therefore \boxed{p_t = -E.}$$

$\boxed{\text{エネルギー保存則（} L \text{ が } t \text{ を陽に含まなければ } E=\text{const.}\text{）。} \longrightarrow \text{運動量保存則に含まれる。}}$

＊ 運動量 p_α は τ, $\hat L$ で計算しても同じ： $p_\alpha = \dfrac{\partial \hat L}{\partial q^{\alpha\prime}}$.

$$\left(\because \frac{\partial \hat L}{\partial q^{\alpha\prime}} = \frac{\partial}{\partial q^{\alpha\prime}}\left\{ t' L\left(t, q, \frac{q'}{t'}\right)\right\} = t' \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\left(t, q, \frac{q'}{t'}\right)}_{\times \frac{1}{t'}} = \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} = p_\alpha. \quad \boxtimes \right)$$