解析力学

2022 12 23(金)

Noether の定理.

$\boxed{\text{物理系が対称性(ある変換に対する不変性)をもてば保存量が存在する.}}$

時間不変性 $\longrightarrow$ エネルギー保存則.
循環座標 の存在(ある座標変数に依存しない) $\longrightarrow$ 運動量保存則.

Noether の定理

Lagrangian $L(t, q, \dot{q})$ … 変換 $q^\alpha(t) \to q^\alpha(t, \sigma)$ $(\alpha = 1, \cdots, N)$ で不変である
($q^\alpha(t, \sigma=0) = q^\alpha(t)$ とする)

$$L(t, q(t,\sigma), \dot{q}(t,\sigma)) = L(t, q(t), \dot{q}(t))$$

$$\downarrow$$

Noether charge

$$Q := \left.\frac{\partial L(t, q(t,\sigma), \dot{q}(t,\sigma))}{\partial \dot{q}^\alpha(t,\sigma)} \frac{\partial q^\alpha(t,\sigma)}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=0}$$

は保存する : $\dfrac{dQ}{dt} = 0$.

∵ ~~$q^\alpha(t,\sigma) \to q^\alpha(\sigma)$ と略記する.~~

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{\partial q^\alpha}{\partial \sigma}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)\frac{\partial q^\alpha}{\partial \sigma} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q^\alpha}{\partial \sigma}\right)$$

Lagrange 運動方程式

$$= \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\frac{\partial q^\alpha}{\partial \sigma} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial \sigma}. \quad \text{—①}$$

一方, $L = L(t, q(t,\sigma), \dot{q}(t,\sigma))$ は σ に依らないから,

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \sigma} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\frac{\partial q^\alpha}{\partial \sigma} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial \sigma}.$$

よって, ① = 0. $\sigma = 0$ とおいて, $\dfrac{dQ}{dt} = 0$ を得る. ☒

<u>例</u> q^β が循環座標であるとき,

$$q^\alpha(t,\sigma) = \begin{cases} q^\beta(t) + \sigma & (\alpha = \beta) \\ q^\alpha(t) & (\alpha \neq \beta) \end{cases}$$

とおけば

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta} = p_\beta \longrightarrow \text{運動量保存則.}$$

(例)　(1粒子系、直交座標系)

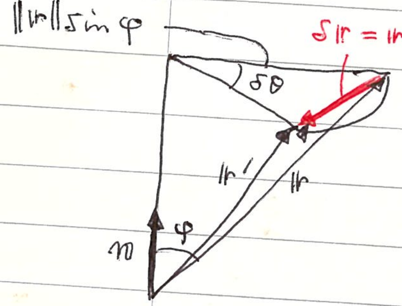
任意の単位ベクトル $\mathbf{n}$ まわりの座標軸の回転（角度 θ）

← (これが変換パラメタ σ)

$\mathbf{r}$: 旧座標系における位置ベクトル、

$\mathbf{r}'$: 新座標系における位置ベクトル。

とくに、微小角 $\delta\theta$ 回転を考える。



$$\|\delta\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}\|\sin\varphi \times \delta\theta = \|\mathbf{r}\times\mathbf{n}\|\,\delta\theta,$$

$\delta\mathbf{r}$ の向き $=$ $\mathbf{r}\times\mathbf{n}$ の向き.

⇓

$$\delta\mathbf{r} = (\mathbf{r}\times\mathbf{n})\,\delta\theta.$$

$$\therefore\ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \mathbf{r}\times\mathbf{n}.$$

一方、$\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{r}}} = \mathbf{p}\ (= m\dot{\mathbf{r}})$ であるから、Noether charge は、

$$Q = \frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{r}}}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{n}) \underset{\uparrow}{=} \mathbf{n}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{r}) = -\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\ell}.$$

($\because$ ベクトル解析の公式 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$)

ここで、$\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ (初等力学における角運動量).

$\mathbf{n}$ は任意だから、結局 角運動量 $\boldsymbol{\ell}$ 自体が保存量となる。

⇓

$\boxed{\text{角運動量保存則}}$