

力学からの微分幾何学

緒方秀教

電気通信大学

June 1, 2023

はじめに

- 動画シリーズ「解析力学—幾何学的視点から—」.
- 解析力学をベースに微分幾何学を学べるかも？
(古典力学をベースに微積分を学ぶ)

はじめに

- 動画シリーズ「解析力学—幾何学的視点から—」.
- 解析力学をベースに微分幾何学を学べるかも？
(古典力学をベースに微積分を学ぶ)

本動画の目的

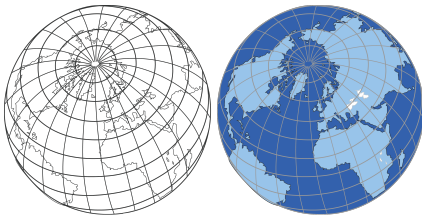
力学の問題を出発点に微分幾何学を学ぶ.

はじめに

F. C. Klein: Erlangen program

幾何学は**変換において不変**なものを学ぶ学問である。

- 初等幾何学：合同変換（平行移動，回転）において不変なものを学ぶ。



緯線・経線が描かれた地球儀



地球そのものには
緯線・経線は描かれていない

数学的・物理的に本質的なものは**座標の選び方に依らない**。

Contents

- ① はじめに
- ② 力学の問題：拘束条件を受ける質点系
- ③ 幾何学的運動方程式
- ④ 反変ベクトル
- ⑤ Lagrange 運動方程式
- ⑥ 共変ベクトル
- ⑦ まとめ

Contents

- 1 はじめに
- 2 力学の問題：拘束条件を受ける質点系
- 3 幾何学的運動方程式
- 4 反変ベクトル
- 5 Lagrange 運動方程式
- 6 共変ベクトル
- 7 まとめ

力学の問題：拘束条件を受ける質点系

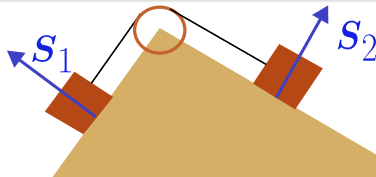
拘束条件を受けて運動する N_P 個の質点系の運動を考える。

変位ベクトル $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \dots, \mathbf{r}_{N_P} = (x_{N_P}, y_{N_P}, z_{N_P}),$
質量 $m_1, \dots, m_{N_P}$

Newton 運動方程式

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i + \mathbf{S}_i \quad (i = 1, \dots, N_P),$$

$\mathbf{F}_i$: 外力 (束縛力を除く), $\mathbf{S}_i$: 束縛力.



力学の問題：拘束条件を受ける質点系

拘束条件を受けて運動する N_P 個の質点系の運動を考える．

$$\begin{aligned} \text{変位ベクトル} \quad & \mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \dots, \mathbf{r}_{N_P} = (x_{N_P}, y_{N_P}, z_{N_P}), \\ \text{質量} \quad & m_1, \dots, m_{N_P} \end{aligned}$$

Newton 運動方程式

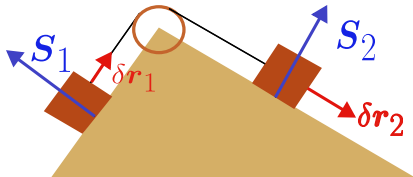
$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i + \mathbf{S}_i \quad (i = 1, \dots, N_P),$$

$\mathbf{F}_i$: 外力 (束縛力を除く), $\mathbf{S}_i$: 束縛力.

- 束縛力：垂直抗力，遠心力，etc.
- 束縛力が必要になることはあまりない。
我々は束縛面上の出来事しか関心がない。
(束縛面の外の出来事はどうでもいい)
- 束縛力を含まない運動方程式を考えたい。

力学の問題：拘束条件を受ける質点系

$\delta \mathbf{r}_1, \dots, \delta \mathbf{r}_{N_P}$ 拘束条件に従う微小変位.



$$\sum_{i=1}^{N_P} \delta \mathbf{r}_i \cdot \left(m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} - \mathbf{F}_i \right) = 0.$$

束縛力 S_i は消えた ($\because S_i \perp \delta \mathbf{r}_i$).

d'Alembert の原理

拘束条件に従う微小変位を質点系に行うとき、
(外力) + (慣性力) の仕事はゼロである。

* (静力学) 仮想仕事の原理。

力学の問題：拘束条件を受ける質点系

- 系の自由度： $N (= 3N_P - \text{拘束条件の数})$.
- 質点系の運動は N 個の独立なパラメータ $q^1, \dots, q^N$ で記述できる.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \mathbf{r}_i(q^1, \dots, q^N) \\ &= (x_i(q^1, \dots, q^N), y_i(q^1, \dots, q^N), z_i(q^1, \dots, q^N)) \\ &\quad (i = 1, \dots, N_P). \end{aligned}$$

$q^1, \dots, q^N$: 一般座標

- 質点系の運動空間 M

$$\begin{aligned} M &:= \left\{ \mathbf{r}(q^1, \dots, q^N) \mid (q^1, \dots, q^N) \in D \right\}, \\ \mathbf{r} &= (x_1, y_1, z_1, \dots, x_{N_P}, y_{N_P}, z_{N_P}) \in \mathbb{R}^{3N_P}, \quad D \subset \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

これから運動方程式を一般座標 $q^1, \dots, q^N$ の微分方程式に書き直す.

力学の問題：拘束条件を受ける質点系

$$\sum_{i=1}^{N_P} \delta \mathbf{r}_i \cdot \left(m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} - \mathbf{F}_i \right) = 0.$$

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha. \quad \longrightarrow \quad \delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha.$$

Einstein の規約

同じギリシャ文字の添字が上下一対に現れる時は、その添字について 1 から N まで和をとるとし、記号 Σ を省略する。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} &= \frac{dq^\alpha}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha}, \\ \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} &= \frac{d^2 q^\alpha}{dt^2} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} + \frac{dq^\alpha}{dt} \frac{dq^\beta}{dt} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \end{aligned}$$

を用いて,

力学の問題：拘束条件を受ける質点系

$$\delta q^\alpha \left(g_{\alpha\beta} \frac{d^2 q^\beta}{dt^2} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \frac{dq^\beta}{dt} \frac{dq^\gamma}{dt} - \mathcal{F}_\alpha \right) = 0,$$

$$g_{\alpha\beta} := \sum_{i=1}^{N_P} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta} \quad \text{計量テンソル},$$

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} := \sum_{i=1}^{N_P} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta \partial q^\gamma},$$

$$\mathcal{F}_\alpha := \sum_{i=1}^{N_P} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha}.$$

任意の独立な微小変分 $\delta q^1, \dots, \delta q^N$ に対して上の式が成り立つから,

$$g_{\alpha\beta} \frac{d^2 q^\beta}{dt^2} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \frac{dq^\beta}{dt} \frac{dq^\gamma}{dt} - \mathcal{F}_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, N).$$

力学の問題：拘束条件を受ける質点系

$$g_{\alpha\beta} \frac{d^2 q^\beta}{dt^2} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \frac{dq^\beta}{dt} \frac{dq^\gamma}{dt} - \mathcal{F}_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, N).$$

$g^{\alpha\beta} : [g^{\alpha\beta}]$ は $[g_{\alpha\beta}]$ の逆行列である

$$\begin{bmatrix} g^{11} & \cdots & g^{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ g^{N1} & \cdots & g^{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{N1} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix}^{-1},$$
$$g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = g^{\gamma\beta} g_{\beta\alpha} = \delta_\alpha^\gamma := \begin{cases} 1 & (\alpha = \gamma) \\ 0 & (\alpha \neq \gamma). \end{cases}$$

$g^{\alpha\beta}$ を用いて次の方程式を得る.

力学の問題：拘束条件を受ける質点系

$$g_{\alpha\beta} \frac{d^2 q^\beta}{dt^2} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \frac{dq^\beta}{dt} \frac{dq^\gamma}{dt} - \mathcal{F}_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, N).$$

$g^{\alpha\beta} : [g^{\alpha\beta}]$ は $[g_{\alpha\beta}]$ の逆行列である

$$\begin{bmatrix} g^{11} & \cdots & g^{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ g^{N1} & \cdots & g^{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{N1} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix}^{-1},$$
$$g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = g^{\gamma\beta} g_{\beta\alpha} = \delta_\alpha^\gamma := \begin{cases} 1 & (\alpha = \gamma) \\ 0 & (\alpha \neq \gamma). \end{cases}$$

$g^{\alpha\beta}$ を用いて次の方程式を得る.

$$\frac{d^2 q^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dq^\beta}{dt} \frac{dq^\gamma}{dt} = \mathcal{F}^\alpha,$$
$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha := g^{\alpha\delta} \Gamma_{\delta\beta\gamma}, \quad \mathcal{F}^\alpha := g^{\alpha\beta} \mathcal{F}_\beta.$$

力学の問題：拘束条件を受ける質点系

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = g^{\alpha\delta} \Gamma_{\delta\beta\gamma}, \quad \Gamma_{\delta\beta\gamma} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^{\delta}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^{\beta} \partial q^{\gamma}}.$$

$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$: Christoffel の記号

$g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ を用いて次のように表される：

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial q^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial q^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^{\delta}} \right)$$

- $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$: 計量テンソル. 運動空間 M 内の「長さ」を与える.

$$ds^2 = \|\mathbf{dr}\|^2 = g_{\alpha\beta} dq^{\alpha} dq^{\beta}.$$

- $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$: 運動空間 M の「曲がり具合」を与える
- 空間 M の曲がり具合が計量テンソル（長さの情報）だけで与えられる.
（古典曲面論）Gauss の驚愕の定理.

Contents

- 1 はじめに
- 2 力学の問題：拘束条件を受ける質点系
- 3 幾何学的運動方程式**
- 4 反変ベクトル
- 5 Lagrange 運動方程式
- 6 共変ベクトル
- 7 まとめ

幾何学的運動方程式

幾何学的運動方程式 $\mathcal{A}^\alpha = \mathcal{F}^\alpha$

$$\mathcal{A}^\alpha := \frac{d^2 q^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dq^\beta}{dt} \frac{dq^\gamma}{dt} = \mathcal{F}^\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, N),$$

Christoffel の記号 $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha := \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial q^\gamma} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\delta} \right),$

一般化力 $\mathcal{F}^\alpha := g^{\alpha\beta} \mathcal{F}_\beta, \quad \mathcal{F}_\beta := \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta}.$

「幾何学的運動方程式」はここだけの造語（一般的に使われる言葉ではない）。

- $\mathcal{A}^\alpha$: 運動空間 M の接平面で見たときの加速度。
- 運動空間 M の接平面で見た運動方程式

（質量×）加速度 = 力。

- ただし、運動空間 M の中の量だけで記述されている。
運動空間の外の量（束縛力）は現れていない。

幾何学的運動方程式

【例】一粒子系平面運動（質量 m ）・極座標 $(q^1, q^2) = (r, \theta)$ について、幾何学的運動方程式を具体的に書き下す。

$$\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{e}_x + r \sin \theta \mathbf{e}_y.$$

$$g_{rr} = m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = m, \quad g_{\theta\theta} = m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = mr^2,$$

$$g_{r\theta} = m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = 0.$$

$$g^{rr} = \frac{1}{m}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{mr^2}, \quad g^{r\theta} = g^{\theta r} = 0$$

から

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} g^{r\delta} \left(\frac{\partial g_{r\delta}}{\partial r} + \frac{\partial g_{r\delta}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial q^\delta} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{rr} \left(\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right) = 0 \end{aligned}$$

などと計算することにより、

幾何学的運動方程式

【例 (続)】 Christoffel の記号

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \text{その他の}\Gamma = 0.$$

幾何学的運動方程式.

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^r \frac{dq^\beta}{dt} \frac{dq^\gamma}{dt} = \mathcal{F}_r, \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\theta \frac{dq^\beta}{dt} \frac{dq^\gamma}{dt} = \mathcal{F}_\theta.$$

上で得た Γ を用いて, 次の幾何学的運動方程式の具体形を得る.

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \mathcal{F}^r, \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = \mathcal{F}^\theta.$$

幾何学的運動方程式

幾何学的加速度 $\mathcal{A}^\alpha$, 一般化力 $\mathcal{F}^\alpha$ は反変ベクトル場である.
i.e., 座標変換 $(q^1, \dots, q^N) \rightarrow (Q^1, \dots, Q^N)$ に対し
次のように変換する.

$$\mathcal{A}^\alpha \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \mathcal{A}^\kappa, \quad \mathcal{F}^\alpha \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \mathcal{F}^\kappa.$$

幾何学的運動方程式 $\mathcal{A}^\alpha = \mathcal{F}^\alpha$ は座標変換に対し形を変えない.

$$\mathcal{A}^\alpha = \mathcal{F}^\alpha \quad \longrightarrow \quad \tilde{\mathcal{A}}^\alpha = \tilde{\mathcal{F}}^\alpha.$$

- 幾何学は変換において不変なものを学ぶ学問である (Erlangen program).
- 数学的・物理的に本質的なものは座標というモノサシに依存しない.
- 幾何学的加速度, 一般化力, 幾何学的運動方程式は数学的・物理的に本質的なものである.

- 1 はじめに
- 2 力学の問題：拘束条件を受ける質点系
- 3 幾何学的運動方程式
- 4 反変ベクトル
- 5 Lagrange 運動方程式
- 6 共変ベクトル
- 7 まとめ

反変ベクトル (場)

幾何学的加速度 $\mathcal{A}^\alpha$, 一般化力 $\mathcal{F}^\alpha$ は反変ベクトル場である,
i.e., 座標変換 $(q^1, \dots, q^N) \rightarrow (Q^1, \dots, Q^N)$ に対し次のように変換する.

$$\mathcal{A}^\alpha \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}}^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \mathcal{A}^\kappa, \quad \mathcal{F}^\alpha \rightarrow \widetilde{\mathcal{F}}^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \mathcal{F}^\kappa.$$

反変ベクトル場

座標変換 $(q^1, \dots, q^N) \rightarrow (Q^1, \dots, Q^N)$ に対し次のように変換する N 個の関数の組 $(X^\alpha(q)) = (X^\alpha(q^1, \dots, q^N))$

$$X^\alpha(q) \rightarrow \tilde{X}^\alpha(Q) = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} X^\kappa(q).$$

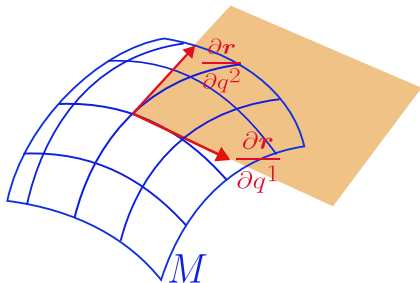
N 個の数を勝手に並べただけではベクトルにならない.

反変ベクトル場

$X^\alpha(q)$: 反変ベクトル場.

$$X = X(q) := X^\alpha(q) \frac{\partial r}{\partial q^\alpha}.$$

は接ベクトル場として意味を持つ.
実際, 座標変換 $(q^1, \dots, q^N) \rightarrow (Q^1, \dots, Q^N)$ に際し



$$\begin{aligned}\widetilde{X}(Q) &:= \tilde{X}^\alpha(Q) \frac{\partial r}{\partial Q^\alpha} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} X^\kappa(q) \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial r}{\partial q^\kappa} \\ &= \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\alpha} X^\kappa(q) \frac{\partial r}{\partial q^\kappa} = \underbrace{\frac{\partial q^\lambda}{\partial q^\kappa}}_{\delta_\kappa^\lambda} X^\kappa(q) \frac{\partial r}{\partial q^\kappa} \\ &= X^\lambda(q) \frac{\partial r}{\partial q^\lambda} = X(q)\end{aligned}$$

が成り立ち, X 自体は座標変換で不変である.

Contents

- ① はじめに
- ② 力学の問題：拘束条件を受ける質点系
- ③ 幾何学的運動方程式
- ④ 反変ベクトル
- ⑤ Lagrange 運動方程式
- ⑥ 共変ベクトル
- ⑦ まとめ

Lagrange 運動方程式

幾何学的運動方程式 $\mathcal{L}^\alpha = \mathcal{F}^\alpha$ は複雑で実用には不向きである。
幾何学的運動方程式を得る直前の方程式に戻る。

$$g_{\alpha\beta} \frac{d^2 q^\beta}{dt^2} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \frac{dq^\beta}{dt} \frac{dq^\gamma}{dt} - \mathcal{F}_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, N),$$

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N_P} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta}, \quad \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} \right).$$

運動エネルギー

$$T := \sum_{i=1}^{N_P} \frac{m_i}{2} \left\| \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right\|^2$$

を一般座標 $(q^1, \dots, q^N)$ を用いて書き直す。

Lagrange 運動方程式

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} &= \dot{q}^\alpha \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha}, \\ T &= \sum_{i=1}^{N_P} \frac{m_i}{2} \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N_P} \frac{m_i}{2} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta, \\ \therefore T(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta.\end{aligned}$$

【注意】 (q^α) と $(\dot{q}^\alpha)$ を独立な変数とみなすことにする.

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial q^\alpha} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} = g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) &= g_{\alpha\beta} \ddot{q}^\beta + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma \\ &= g_{\alpha\beta} \ddot{q}^\beta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta} \right) \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} &= g_{\alpha\beta} \ddot{q}^\beta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} \right) \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma \\ &= g_{\alpha\beta} \ddot{q}^\beta + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma.\end{aligned}$$

Lagrange 運動方程式

結局、幾何学的運動方程式は次のように書き直される。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = \mathcal{F}_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, N),$$

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \quad (\text{運動エネルギー}), \quad \mathcal{F}_\alpha = \sum_{i=1}^{N_P} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha}.$$

とくに外力が保存力（ポテンシャル U ）である場合、

$$\mathcal{F}_\alpha = - \frac{\partial U(q)}{\partial q^\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

が示されるから、 U が速度 ($\dot{q}^\alpha$) を陽に含まないことに注意して次を得る。

Lagrange 運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, N),$$

$$L := T - U = (\text{運動エネルギー}) - (\text{ポテンシャル}) \quad \text{Lagrangian.}$$

Lagrange 運動方程式

【例】一粒子系平面運動（質量 m ）・極座標 $(q^1, q^2) = (r, \theta)$ の場合.

$$\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{e}_x + r \sin \theta \mathbf{e}_y,$$

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) \mathbf{e}_x + (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{e}_y,$$

$$T = \frac{m}{2} \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2), \quad L = T - U.$$

Lagrange 運動方程式.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0.$$

上の L を代入して運動方程式を書き下すと、次のようになる.

$$m\ddot{r} - mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{\partial U}{\partial r} = 0,$$

$$mr^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2mr \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0.$$

これは幾何学的運動方程式から得られる結果と一致する.

Contents

- 1 はじめに
- 2 力学の問題：拘束条件を受ける質点系
- 3 幾何学的運動方程式
- 4 反変ベクトル
- 5 Lagrange 運動方程式
- 6 共変ベクトル**
- 7 まとめ

共変ベクトル

Lagrange 運動方程式

$$[L]_{\alpha} := \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, N).$$

$[L]_{\alpha}$ は共変ベクトル場の成分である,

i.e., $[L]_{\alpha}$ を座標 (Q^{α}) を用いて定義したものを $[\widetilde{L}]_{\alpha}$ とすれば,

$$[\widetilde{L}]_{\alpha} = \frac{\partial q^{\kappa}}{\partial Q^{\alpha}} [L]_{\kappa}.$$

したがって,

$$[L]_{\alpha} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad [\widetilde{L}]_{\alpha} = 0.$$

Lagrange 運動方程式は座標の取り方に依存しない方程式である.

共変ベクトル，双対空間 V^*

V : (実 N 次元) ベクトル空間.

- 共変ベクトル : V 上の線型汎関数, i.e., 次を満たす線形写像 $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\omega(au + bv) = a\omega(u) + b\omega(v) \quad (\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V)$$

- V の双対空間 V^* : 共変ベクトル, i.e., V 上の線型汎関数全体の集合.

共変ベクトル

共変ベクトル, 双対空間 V^*

V : (実 N 次元) ベクトル空間.

- 共変ベクトル : V 上の線型汎関数, i.e., 次を満たす線形写像 $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\omega(au + bv) = a\omega(u) + b\omega(v) \quad (\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V)$$

- V の双対空間 V^* : 共変ベクトル, i.e., V 上の線型汎関数全体の集合.

双対空間 V^* は (実 N 次元) ベクトル空間である.

共変ベクトル $\omega, \eta \in V^*$ の線型結合 $a\omega + b\eta$ ($a, b \in \mathbb{R}$) の定義:

$$(a\omega + b\eta)(u) := a\omega(u) + b\eta(u) \quad (u \in V).$$

このように定義した $a\omega + b\eta$ は V^* に属する (線型汎関数である).

共変ベクトル

これから、共変ベクトルの成分が満たす変換則を導出する。

$\{e_1, \dots, e_N\} : V$ の基底.

$\Rightarrow \{e_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ の双対基底 $\{e_*^\alpha\}_{\alpha=1}^N = \{e_*^1, \dots, e_*^N\}$
... 次を満たす共変ベクトル (線型汎関数).

$$e_*^\alpha(e_\beta) = \delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta). \end{cases}$$

任意の共変ベクトル $\omega \in V^*$ は $\{e_*^\alpha\}$ の一次結合で一意的に表される
($\{e_*^\alpha\}$ は V^* の基底である).

$$\omega = \omega_\alpha e_*^\alpha, \quad \omega_\alpha = \omega(e_\alpha).$$

共変ベクトル

ベクトル空間 V の基底の入れ替え

$$\{e_\alpha\} \rightarrow \{f_\alpha\}, \quad e_\alpha = C^\beta_\alpha f_\beta \quad (C := [C^\beta_\alpha] \text{ は正則行列}).$$

- ベクトル $v \in V$ の成分の変換.

$$v = v^\alpha e_\alpha = \widetilde{v}^\alpha f_\alpha, \quad \widetilde{v}^\alpha = C^\alpha_\beta v^\beta.$$

- 双対基底の入れ替え.

$$\{e_*^\alpha\} \rightarrow \{f_*^\alpha\}, \quad e_*^\alpha = (C^{-1})^\alpha_\beta f_*^\beta \\ ((C^{-1})^\alpha_\beta : \text{逆行列 } C^{-1} \text{ の } (\alpha, \beta)\text{-成分}).$$

- 共変ベクトル $\omega \in V^*$ の成分の変換.

$$\omega = \omega_\alpha e_*^\alpha = \widetilde{\omega}_\alpha f_*^\alpha, \quad \widetilde{\omega}_\alpha = (C^{-1})^\beta_\alpha \omega_\beta.$$

共変ベクトル

力学の話に戻る.

運動空間 M 上の 1 点 P における接 (ベクトル) 空間.

$$T_P := \left\{ X = X^\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \right)_P \mid X^\alpha \in \mathbb{R} \ (\alpha = 1, \dots, N) \right\}$$

* 下付き添字 P : 点 $P \in M$ における値を意味する.

座標変換 $(q^\alpha) \rightarrow (Q^\alpha)$ にともなう基底の入れ替え

$$\left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \right)_P \right\} \rightarrow \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial Q^\alpha} \right)_P \right\}, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\kappa} \right)_P = \left(\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \right)_P \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial Q^\alpha} \right)_P.$$

$\Rightarrow$ 接ベクトル $X_P \in T_P$ の成分の変換則.

$$X_P \rightarrow \widetilde{X_P} = \left(\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \right)_P X_P.$$

反変ベクトル場の変換則.

共変ベクトル

ω_P : 共変ベクトル (場), i.e., 接空間 T_P の双対空間 T_P^* の元 (線型汎関数).
 T_P の基底 $\{(\partial r / \partial q^\alpha)_P\}$ の双対基底を $\{(dq^\alpha)_P\}$ と記すと,

$$\omega_P = (\omega_\alpha)_P (dq^\alpha)_P.$$

双対基底の変換則

$$\{(dq^\alpha)_P\} \rightarrow \{(dQ^\alpha)_P\}, \quad (dq^\kappa)_P = \left(\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \right)_P (dQ^\alpha)_P,$$

$\Rightarrow$ (Jacobi 行列 $\left(\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta} \right)$ の逆行列は $\left(\frac{\partial q^\alpha}{\partial Q^\beta} \right)$ であることに注意).

ω_P の成分の変換則

$$(\omega_\alpha)_P \rightarrow (\widetilde{\omega}_\alpha)_P, \quad (\widetilde{\omega}_\alpha)_P = \left(\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \right)_P (\omega_\kappa)_P.$$

共変ベクトル場の変換則.

共変ベクトル

$(X^\alpha)_P$ 反変ベクトル（接ベクトル）の成分

$(\omega_\alpha)_P$ 共変ベクトルの成分

$(\omega_\alpha)_P (X^\alpha)_P$ は変数変換 $(q^\alpha) \rightarrow (Q^\alpha)$ で不変である（**スカラー**である）。

実際、 $(X^\alpha)_P \rightarrow (\widetilde{X}^\alpha)_P$, $(\omega_\alpha)_P \rightarrow (\widetilde{\omega}_\alpha)_P$ と変換するとすれば、

$$\begin{aligned}(\widetilde{\omega}_\alpha)_P (\widetilde{X}^\alpha)_P &= \left(\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \right)_P (\omega_\kappa)_P \left(\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\lambda} \right)_P (X^\lambda)_P \\&= \underbrace{\left(\frac{\partial q^\kappa}{\partial q^\lambda} \right)_P}_{\delta_\lambda^\kappa} (\omega_\kappa)_P (X^\lambda)_P = (\omega_\kappa)_P (X^\kappa)_P\end{aligned}$$

となり、 $(\omega_\kappa)_P (X^\kappa)_P$ は不変であることがわかる。

共変ベクトル

計量テンソル.

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N_P} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta}, \quad g^{\alpha\beta} : (g^{\alpha\beta}) \text{ は } (g_{\alpha\beta}) \text{ の逆行列.}$$

計量テンソルはベクトルの添字の上げ下げを行う.

$$\begin{aligned} (X^\alpha)_P : \text{反変ベクトル} &\rightarrow (X_\alpha)_P := (g_{\alpha\beta})_P (X^\beta)_P : \text{共変ベクトル,} \\ (\omega_\alpha)_P : \text{共変ベクトル} &\rightarrow (\omega^\alpha)_P := (g^{\alpha\beta})_P (\omega_\beta)_P : \text{反変ベクトル.} \end{aligned}$$

【証明】 $g_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}$ はそれぞれ二階共変/反変テンソルの変換則に従う, i.e.,

$$\widetilde{g_{\alpha\beta}} = \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} g_{\kappa\lambda}, \quad \widetilde{g^{\alpha\beta}} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda} g^{\kappa\lambda}.$$

共変ベクトル

計量テンソル.

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N_P} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta}, \quad g^{\alpha\beta} : (g^{\alpha\beta}) \text{ は } (g_{\alpha\beta}) \text{ の逆行列.}$$

計量テンソルはベクトルの添字の上げ下げを行う.

$$\begin{aligned} (X^\alpha)_P : \text{反変ベクトル} &\rightarrow (X_\alpha)_P := (g_{\alpha\beta})_P (X^\beta)_P : \text{共変ベクトル,} \\ (\omega_\alpha)_P : \text{共変ベクトル} &\rightarrow (\omega^\alpha)_P := (g^{\alpha\beta})_P (\omega_\beta)_P : \text{反変ベクトル.} \end{aligned}$$

【証明】 したがって,

$$\begin{aligned} (\widetilde{X}_\alpha)_P &= (\widetilde{g_{\alpha\beta}})_P (\widetilde{X}^\beta)_P = \left(\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \right)_P \left(\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} \right)_P (g_{\kappa\lambda})_P \left(\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\mu} \right)_P (X^\mu)_P \\ &= \left(\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \right)_P \underbrace{\left(\frac{\partial q^\lambda}{\partial q^\mu} \right)_P}_{\delta_\mu^\lambda} (g_{\kappa\lambda})_P (X^\mu)_P = \left(\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\alpha} \right)_P (X_\kappa)_P \end{aligned}$$

となり, $(X_\alpha)_P$ は共変ベクトルの変換則にしたがう, etc.

Q.E.D.

共変ベクトル

- $(X^\alpha)_P$: 点 $P \in M$ における反変ベクトル (接ベクトル).
- $(\omega_\alpha)_P$: 点 $P \in M$ における共変ベクトル.



- 反変 (接) ベクトル場 X
... 各点 $P \in M$ に反変 (接) ベクトル $X_P \in T_P$ を対応させる写像.
- 共変ベクトル場 ω
... 各点 $P \in M$ に共変ベクトル $\omega_P \in T_P^*$ を対応させる写像.
- スカラー場 f
... 各点 $P \in M$ に実数 $f_P = f(P) \in \mathbb{R}$ を対応させる写像,
i.e., 写像 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ (変数変換において不変).

Contents

- ① はじめに
- ② 力学の問題：拘束条件を受ける質点系
- ③ 幾何学的運動方程式
- ④ 反変ベクトル
- ⑤ Lagrange 運動方程式
- ⑥ 共変ベクトル
- ⑦ まとめ

- 力学の問題をベースに微分幾何学を学ぶ。
拘束を受ける質点系の力学。
- 幾何学的運動方程式, Lagrange 運動方程式。
座標変換に対して共変的な運動方程式である。
- 反変ベクトル, 共変ベクトル。
数学的・物理的に本質的な量はベクトルの変換則に従う。

次回の予定.

- 幾何学的加速度 $\mathcal{A}^\alpha \rightarrow$ 共変微分。
- ベクトルの変換則に従う微分。
- 曲率, etc.