力学からの微分幾何学・付録　　　緒方秀教

2023.6.1

Christoffel記号 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ の計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ による表式の証明

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N_P} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta}.$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} = \sum_{i=1}^{N_P} m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta \partial q^\gamma} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\gamma \partial q^\alpha}}_{(\mathrm{i})} \right), \qquad \text{①}$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta} = \sum_{i=1}^{N_P} m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta \partial q^\gamma} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\gamma} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}}_{(\mathrm{ii})} \right), \qquad \text{②}$$

$$\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} = \sum_{i=1}^{N_P} m_i \left(\underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\gamma \partial q^\alpha}}_{(\mathrm{i})} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\gamma} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}}_{(\mathrm{ii})} \right). \qquad \text{③}$$

(①+②−③)÷2をつくると、同じローマ数字をつけた項どうしが打ち消し合い、次を得る。

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} \right) = \sum_{i=1}^{N_P} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta \partial q^\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma}.$$

これより $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\delta}\Gamma_{\delta\beta\gamma}$ の計量テンソルによる表式を得る。 ☒

幾何学的加速度 A^α の変換則 $A^\alpha \to \tilde{A}^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\nu} A^\nu$ の証明

(1) はじめに、Christoffel記号の変換則

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \to \tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\nu}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma}\Gamma^\nu_{\lambda\mu} + \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\nu}\frac{\partial^2 q^\nu}{\partial Q^\beta \partial Q^\gamma}$$

を示す。

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = g^{\alpha\delta}\Gamma_{\delta\beta\gamma}, \quad \Gamma_{\delta\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial q^\gamma} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\delta}\right)$$

であるから、$\Gamma_{\delta\beta\gamma}$ の変換則

$$\Gamma_{\delta\beta\gamma} \to \tilde{\Gamma}_{\delta\beta\gamma} = \frac{\partial q^\nu}{\partial Q^\delta}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma}\Gamma_{\nu\lambda\mu} + \frac{\partial q^\nu}{\partial Q^\delta}\frac{\partial^2 q^\lambda}{\partial Q^\beta \partial Q^\gamma} g_{\nu\lambda} \qquad \text{——①}$$

を示せばよい。実際、①が成り立てば

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} &= \tilde{g}^{\alpha\delta}\tilde{\Gamma}_{\delta\beta\gamma} \\
&= \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\rho}\underbrace{\boxed{\frac{\partial Q^\delta}{\partial q^\sigma}} g^{\rho\sigma} \boxed{\frac{\partial q^\nu}{\partial Q^\delta}}}_{\frac{\partial q^\nu}{\partial q^\sigma} = \delta^\nu_\sigma}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma}\Gamma_{\nu\lambda\mu} \\
&\quad + \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\rho}\underbrace{\boxed{\frac{\partial Q^\delta}{\partial q^\sigma}} g^{\rho\sigma} \boxed{\frac{\partial q^\nu}{\partial Q^\delta}}}_{\frac{\partial q^\nu}{\partial q^\sigma} = \delta^\nu_\sigma}\frac{\partial^2 q^\lambda}{\partial Q^\beta \partial Q^\gamma} g_{\nu\lambda} \\
&= \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\rho}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma}\underbrace{g^{\rho\nu}\Gamma_{\nu\lambda\mu}}_{\Gamma^\rho_{\lambda\mu}} \\
&\quad + \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\rho}\frac{\partial^2 q^\lambda}{\partial Q^\beta \partial Q^\gamma}\underbrace{g^{\rho\nu} g_{\nu\lambda}}_{\delta^\rho_\lambda} \\
&= \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\rho}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma}\Gamma^\rho_{\lambda\mu} + \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\lambda}\frac{\partial^2 q^\lambda}{\partial Q^\beta \partial Q^\gamma}
\end{aligned}$$

により、所望の $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ に対する変換則を得る。

$$\tilde{\Gamma}_{\delta\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{g}_{\delta\beta}}{\partial Q^\gamma} + \frac{\partial \tilde{g}_{\delta\gamma}}{\partial Q^\beta} - \frac{\partial \tilde{g}_{\beta\gamma}}{\partial Q^\delta}\right).$$

$$\frac{\partial \tilde{g}_{\delta\beta}}{\partial Q^\gamma} = \frac{\partial}{\partial Q^\gamma}\left(\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\delta}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} g_{\kappa\lambda}\right)$$

$$= \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\delta}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}\frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial Q^\gamma} + \frac{\partial^2 q^\kappa}{\partial Q^\gamma \partial Q^\delta}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} g_{\kappa\lambda} + \frac{\partial^2 q^\lambda}{\partial Q^\beta \partial Q^\gamma}\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\delta} g_{\kappa\lambda}$$

$$= \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\delta}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma}\frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial q^\mu} + \underbrace{\frac{\partial^2 q^\kappa}{\partial Q^\gamma \partial Q^\delta}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} g_{\kappa\lambda}}_{(i)} + \frac{\partial^2 q^\lambda}{\partial Q^\beta \partial Q^\gamma}\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\delta} g_{\kappa\lambda}, \quad \text{——②}$$

同様にして、

$$\frac{\partial \tilde{g}_{\delta\gamma}}{\partial Q^\beta} = \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\delta}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\gamma}\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\beta}\frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial q^\mu} + \underbrace{\frac{\partial^2 q^\kappa}{\partial Q^\beta \partial Q^\delta}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\gamma} g_{\kappa\lambda}}_{(ii)} + \frac{\partial^2 q^\lambda}{\partial Q^\beta \partial Q^\gamma}\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\delta} g_{\kappa\lambda}, \quad \text{——③}$$

$$\frac{\partial \tilde{g}_{\beta\gamma}}{\partial Q^\delta} = \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\beta}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\gamma}\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\delta}\frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial q^\mu} + \underbrace{\frac{\partial^2 q^\kappa}{\partial Q^\delta \partial Q^\beta}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\gamma} g_{\kappa\lambda}}_{(ii)} + \underbrace{\frac{\partial^2 q^\lambda}{\partial Q^\gamma \partial Q^\delta}\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\beta} g_{\kappa\lambda}}_{(i)}. \quad \text{——④}$$

(②+③−④)÷2 をつくると、同じローマ数字をつけた項どうしは打ち消し合うので（$g_{\kappa\lambda} = g_{\lambda\kappa}$ に注意）

$$\tilde{\Gamma}_{\delta\beta\gamma} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial q^\mu}\left(\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\delta}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma} + \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q}\frac{\partial q^\mu}{\partial Q} - \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\beta}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q}\frac{\partial q^\mu}{\partial Q}\right)$$

$$+ \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\delta}\frac{\partial^2 q^\kappa}{\partial Q^\beta \partial Q^\gamma} g_{\kappa\lambda}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\delta}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma}\left(\frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial q^\mu} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial q^\kappa}\right) + \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\delta}\frac{\partial^2 q^\lambda}{\partial Q^\beta \partial Q^\gamma} g_{\kappa\lambda}$$

$$= \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\delta}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\gamma}\Gamma_{\kappa\lambda\mu} + \frac{\partial q^\kappa}{\partial Q^\delta}\frac{\partial^2 q^\lambda}{\partial Q^\beta \partial Q^\gamma} g_{\kappa\lambda}$$

により $\Gamma_{\delta\beta\gamma}$ の変換則を得る.

(2) $$\tilde{A}^\alpha = \frac{d^2 Q^\alpha}{dt^2} + \tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dQ^\beta}{dt}\frac{dQ^\gamma}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dQ^\alpha}{dt}\right) + \tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dQ^\beta}{dt}\frac{dQ^\gamma}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\nu}\frac{dq^\nu}{dt}\right) + \tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda}\frac{dq^\lambda}{dt}\frac{\partial Q^\gamma}{\partial q^\mu}\frac{dq^\mu}{dt}$$

$$= \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\nu}\frac{d^2 q^\nu}{dt^2} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\nu}\right)\frac{dq^\nu}{dt}}_{\frac{\partial^2 Q^\alpha}{\partial q^\nu \partial q^\lambda}\frac{dq^\nu}{dt}\frac{dq^\lambda}{dt}} + \underbrace{\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda}\frac{\partial Q^\gamma}{\partial q^\mu}\frac{dq^\lambda}{dt}\frac{dq^\mu}{dt}}_{(*)}$$

$$= \frac{\partial^2 Q^\delta}{\partial q^\lambda \partial q^\mu}\delta^\alpha_\delta \frac{dq^\lambda}{dt}\frac{dq^\mu}{dt}$$

$$= \frac{\partial^2 Q^\delta}{\partial q^\lambda \partial q^\mu}\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\nu}\frac{\partial q^\nu}{\partial Q^\delta}\frac{dq^\lambda}{dt}\frac{dq^\mu}{dt}$$

$$\left(\begin{aligned} (*) &= \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}\delta^\alpha_\delta \frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda}\frac{\partial Q^\gamma}{\partial q^\mu}\frac{dq^\lambda}{dt}\frac{dq^\mu}{dt} \\ &= \tilde{\Gamma}^\delta_{\beta\gamma}\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\nu}\frac{\partial q^\nu}{\partial Q^\delta}\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda}\frac{\partial Q^\gamma}{\partial q^\mu}\frac{dq^\lambda}{dt}\frac{dq^\mu}{dt} \end{aligned} \right)$$

$$= \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\nu}\left[\frac{d^2 q^\nu}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{\partial q^\nu}{\partial Q^\delta}\frac{\partial^2 Q^\delta}{\partial q^\lambda \partial q^\mu} + \frac{\partial q^\nu}{\partial Q^\delta}\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda}\frac{\partial Q^\gamma}{\partial q^\mu}\tilde{\Gamma}^\delta_{\beta\gamma}\right)}_{☆}\frac{dq^\lambda}{dt}\frac{dq^\mu}{dt}\right]$$

(1)で得た$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$の変換則で座標変換の向きを$(Q^\alpha)\to(q^\alpha)$と逆にしたものから☆$=\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$となるので、

$$\tilde{A}^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\nu}\left(\frac{d^2 q^\nu}{dt^2} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\frac{dq^\lambda}{dt}\frac{dq^\mu}{dt}\right) = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\nu}A^\nu$$

を得る。

⊠

一般化力 $\mathcal{F}^\alpha$ の変換則 $\mathcal{F}^\alpha \to \tilde{\mathcal{F}}^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\nu}\mathcal{F}^\nu$ の証明

$$\mathcal{F}^\alpha = g^{\alpha\beta}\mathcal{F}_\beta , \quad \mathcal{F}_\beta = \sum_{i=1}^{N_P} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta}$$

なので、$\mathcal{F}_\alpha$ が次の変換則に従うことを示せばよい。

$$\mathcal{F}_\alpha \to \tilde{\mathcal{F}}_\alpha = \frac{\partial q^\nu}{\partial Q^\alpha}\mathcal{F}_\nu \quad \text{——①}$$

（ ($\mathcal{F}_\alpha$) は共変ベクトル場の成分である ）。

実際、$g^{\alpha\beta}$ は変換則

$$g^{\alpha\beta} \to \tilde{g}^{\alpha\beta} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\nu}\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda} g^{\nu\lambda} \quad \text{——②}$$

に従うので（ $g^{\alpha\beta}$ は二階反変テンソルの成分である ）、①が成り立てば

$$\tilde{\mathcal{F}}^\alpha = \tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{\mathcal{F}}_\beta = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\nu}\frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\lambda} g^{\nu\lambda} \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\beta}\mathcal{F}_\mu$$

$$\frac{\partial q^\mu}{\partial q^\lambda} = \delta^\mu_\lambda$$

$$= \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\nu} g^{\nu\lambda}\mathcal{F}_\lambda = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\nu}\mathcal{F}^\nu$$

により所望の $\mathcal{F}^\alpha$ の変換則を得る。

$$\tilde{\mathcal{F}}_\alpha = \sum_{i=1}^{N_P} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial Q^\alpha} = \sum_{i=1}^{N_P} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial q^\nu}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\nu}$$

$$= \frac{\partial q^\nu}{\partial Q^\alpha}\left(\sum_{i=1}^{N_P} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\nu}\right) = \frac{\partial q^\nu}{\partial Q^\alpha}\mathcal{F}_\nu$$

により①が示された。

$g^{\alpha\beta}$ の変換則②を示すことが残っている。これは、$g_{\alpha\beta}$ の変換則

$$g_{\alpha\beta} \to \tilde{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial q^\nu}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} g_{\nu\lambda} \quad \text{——③}$$

を示せば得られる（ $g_{\alpha\beta}$ は二階共変テンソル場の成分である ）。

実際，③ は行列 $G=[g_{\alpha\beta}]$, $M=\left[\dfrac{\partial q^\alpha}{\partial Q^\beta}\right]=\begin{bmatrix} \partial q^1/\partial Q^1 & \cdots & \partial q^1/\partial Q^N \\ \vdots & & \vdots \\ \partial q^N/\partial Q^1 & \cdots & \partial q^N/\partial Q^N \end{bmatrix}$, $\tilde{G}=[\tilde{g}_{\alpha\beta}]$, に対する等式

$$\tilde{G} = M^T G M$$

と同じであり，この逆行列をとって得られる等式は②に他ならないからである.

③ は次のようにして示される.

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N_P} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial Q^\alpha}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial Q^\beta}$$

$$= \sum_{i=1}^{N_P} m_i \left(\frac{\partial q^\varphi}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\varphi}\right)\cdot\left(\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\lambda}\right)$$

$$= \frac{\partial q^\varphi}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}\sum_{i=1}^{N_P} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\varphi}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\lambda}$$

$$= \frac{\partial q^\varphi}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} g_{\varphi\lambda}. \qquad \boxtimes$$

$[L]_\alpha$ が共変ベクトルであることの証明

$$
\begin{aligned}
\widetilde{[L]}_\alpha &:= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q^\alpha} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q^k}{\partial \dot{Q}^\alpha}\frac{\partial L}{\partial q^k} + \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{Q}^\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \\
&= \frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}[L]_k + \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}\right) - \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial Q^\alpha}\right]\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k},
\end{aligned}
$$

ただし，(*) で q^k が $\dot{Q}^\alpha$ に陽に依らないこと，および，

$$\dot{q}^k = \frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}\dot{Q}^\alpha$$

から得られる

$$\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{Q}^\alpha} = \frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}$$

を用いた。したがって，

$$\widetilde{[L]}_\alpha = \frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}[L]_\alpha + \underbrace{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}\right) - \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial Q^\alpha}\right]}_{①}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}.$$

あとは ①$=0$ を示せばよい。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q^k}{\partial Q^\alpha}\right) = \frac{\partial^2 q^k}{\partial Q^\alpha \partial Q^\beta}\dot{Q}^\beta,$$

$$\dot{q}^k = \frac{\partial q^k}{\partial Q^\beta}\dot{Q}^\beta, \quad \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial Q^\alpha} = \frac{\partial^2 q^k}{\partial Q^\alpha \partial Q^\beta}\dot{Q}^\beta$$

により，①$=0$ を得る。 ⊠