力学からの微分幾何学 2
共変微分，曲率

緒方秀教

電気通信大学

June 8, 2023

はじめに

前回の内容

- 拘束を受ける質点系の力学を考えることにより，微分幾何学を学ぶ．
- 幾何学的運動方程式，Lagrange 運動方程式．
- 反変／共変ベクトル . . . 運動空間上のベクトルとして問題なく定義できる．

今回の内容

- 共変微分
  ベクトル場として問題なく定義できる，ベクトル場の微分．
- 曲率．

Contents

Contents

幾何学的加速度

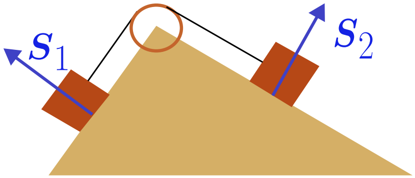
拘束を受けて運動する N_P 個の質点系の運動を考える．

$$\begin{aligned} \text{変位ベクトル} \quad & \boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \ldots, \boldsymbol{r}_{N_\mathrm{P}} = (x_{N_\mathrm{P}}, y_{N_\mathrm{P}}, z_{N_\mathrm{P}}), \\ \text{質量} \quad & m_1, \ldots, m_{N_\mathrm{P}} \end{aligned}$$

Newton 運動方程式

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{S}_i \quad (\, i = 1, \ldots, N_\mathrm{P} \,),$$

$\boldsymbol{F}_i$ ： 外力（束縛力を除く）， $\boldsymbol{S}_i$ ： 束縛力．



幾何学的加速度

拘束を受けて運動する N_P 個の質点系の運動を考える．

$$\begin{aligned} \text{変位ベクトル} \quad & \boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \ldots, \boldsymbol{r}_{N_\mathrm{P}} = (x_{N_\mathrm{P}}, y_{N_\mathrm{P}}, z_{N_\mathrm{P}}), \\ \text{質量} \quad & m_1, \ldots, m_{N_\mathrm{P}} \end{aligned}$$

Newton 運動方程式

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{S}_i \quad (\, i = 1, \ldots, N_\mathrm{P} \,),$$

$$\boldsymbol{F}_i \ : \ \text{外力（束縛力を除く）}, \qquad \boldsymbol{S}_i \ : \ \text{束縛力}.$$

- 一般座標：運動を記述する N（＝自由度）個の独立なパラメータ $q^1, \ldots, q^N$

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q^1, \ldots, q^N) \quad (\, i = 1, \ldots, N_\mathrm{P} \,).$$

- 運動空間

$$M = \left\{ \boldsymbol{r}(q^1, \ldots, q^N) \;\middle|\; (q^1, \ldots, q^N) \in D \right\},$$

$$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_{N_\mathrm{P}}) \in \mathbb{R}^{3N_\mathrm{P}}, \qquad D \subset \mathbb{R}^N.$$

M 内で完結するような議論をしたい（束縛力 $\boldsymbol{S}_i$ は考えたくない）．

幾何学的加速度

幾何学的運動方程式

運動空間 M 内の量だけで記述できる方程式（束縛力を含まない）.

$$\mathscr{A}^\alpha := \frac{\mathrm{d}^2 q^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}q^\gamma}{\mathrm{d}t} = \mathscr{F}^\alpha,$$

$$g_{\alpha\beta} := \sum_{i=1}^{N_\mathrm{P}} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta} \quad \text{計量テンソル},$$

$$g^{\alpha\beta} \;:\; (g^{\alpha\beta}) \text{ は } (g_{\alpha\beta}) \text{ の逆行列},$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} &:= g^{\alpha\delta} \sum_{i=1}^{N_\mathrm{P}} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\delta} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q^\beta \partial q^\gamma} \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial q^\gamma} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\delta} \right) \quad \text{Christoffel の記号},\end{aligned}$$

$$\mathscr{F}^\alpha := g^{\alpha\beta} \sum_{i=1}^{N_\mathrm{P}} m_i \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta} \quad \text{一般化力}.$$

幾何学的加速度

幾何学的加速度

$$\mathscr{A}^\alpha := \frac{\mathrm{d}^2 q^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}q^\gamma}{\mathrm{d}t}$$

反変ベクトル場の成分である，i.e.,

$$\text{座標変換}\ (q^\alpha) \to (Q^\alpha) \quad \text{に際し} \quad \mathscr{A}^\alpha \to \widetilde{\mathscr{A}}^\alpha = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \mathscr{A}^\kappa.$$

$$\Downarrow$$

$\mathscr{A} := \mathscr{A}^\alpha \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\alpha}$ は接ベクトル場として問題なく定義できる．

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}^\alpha \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\alpha} = \widetilde{\mathscr{A}}^\alpha \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial Q^\alpha}.$$

幾何学的加速度

速度 $v^\alpha := \dot{q}^\alpha$ を用いると，

$$\text{幾何学的加速度} \quad \mathscr{A}^\alpha = \frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}t} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} v^\beta v^\gamma.$$

- 単なる時間微分 $\dfrac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}t}$ は（反変）ベクトル場にならない．
- 数学的／物理的実体を持つベクトル場を与えるには，時間微分の定義を修正しなければならない．

∗ 速度 $v^\alpha = \dot{q}^\alpha$ は反変ベクトル場である：$v^\alpha \to \widetilde{v^\alpha} = \dfrac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} v^\kappa.$

$$\because \quad \widetilde{v^\alpha} = \frac{\mathrm{d}Q^\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa}\frac{\mathrm{d}q^\kappa}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} v^\kappa.$$

$\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$：運動空間 M 上の接（反変）ベクトル場

$$\boldsymbol{X} = X^\alpha \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\alpha}, \quad \boldsymbol{Y} = Y^\alpha \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\alpha}.$$

これから，ベクトル場 $\boldsymbol{Y}$ の $\boldsymbol{X}$ 方向微分を，
接（反変）ベクトル場として実体を持つように導入する．

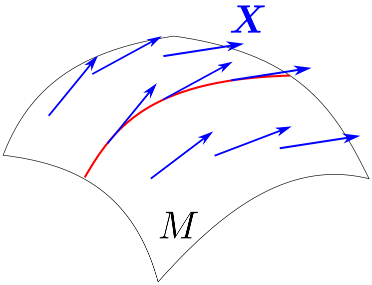
ベクトル場 $\boldsymbol{X}$ の積分曲線.

- 各点で $\boldsymbol{X}$ を接ベクトルに持つような，運動空間 M 上の曲線.
- 次の微分方程式の解 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}).$$

一般座標を用いれば，次の微分方程式の解 $(q^\alpha(s))$

$$\frac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}s} = X^\alpha(q^1, \ldots, q^N) \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,).$$



共変微分

通常の多変数微積分におけるベクトル場 $\boldsymbol{Y}$ の $\boldsymbol{X}$ 方向微分

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{r}(s))}{\mathrm{d}s}, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s) \quad X \text{ の積分曲線.}$$

この接空間方向成分を抽出する.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{r}(s))}{\mathrm{d}s} &= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}s}\right)_{\parallel} + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}s}\right)_{\perp} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}s}\right)_{\parallel}^{\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^{\alpha}} + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}s}\right)_{\perp}.\end{aligned}$$

接空間方向成分は次の式で計算できる.

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}s}\right)_{\parallel}^{\alpha} = g^{\alpha\beta} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{P}}} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^{\beta}} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}_i}{\mathrm{d}s},$$

ここで，$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_{N_{\mathrm{P}}})$ に合わせて $\boldsymbol{Y}$ を次のように分割している，

$$\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_{N_{\mathrm{P}}}),$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}_i(\boldsymbol{r}(s))}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[Y^\alpha(q(s))\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha}\right] \\
&= \frac{\mathrm{d}Y(q(s))}{\mathrm{d}s}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} + Y^\alpha(q(s))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}q^\beta(s)}{\mathrm{d}s}\frac{\partial Y^\alpha(q(s))}{\partial q^\beta}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} + Y^\alpha(q(s))\frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \\
&= X^\beta\frac{\partial Y^\alpha}{\partial q^\beta}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} + X^\beta Y^\alpha\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta},
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{i=1}^{N_\mathrm{P}} m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\gamma}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}_i}{\mathrm{d}s} = g_{\gamma\beta}X^\alpha\frac{\partial Y^\beta}{\partial q^\alpha} + \Gamma_{\gamma\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta,
$$

$$
\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}s}\right)^\delta_{\parallel} = X^\alpha\frac{\partial Y^\delta}{\partial q^\alpha} + \Gamma^\delta_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta.
$$

反変ベクトル場 $\boldsymbol{Y}$ の反変ベクトル場 $\boldsymbol{X}$ 方向の共変微分．

共変微分

共変微分

$$\nabla_X Y^\alpha := X^\beta \frac{\partial Y^\alpha}{\partial q^\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} X^\beta Y^\gamma,$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\kappa} \left(\frac{\partial g_{\kappa\beta}}{\partial q^\gamma} + \frac{\partial g_{\kappa\gamma}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\kappa}. \right)$$

共変微分 $\nabla_X Y^\alpha$ は反変ベクトル場の成分である,

i.e., 座標変換 $(q^1, \ldots, q^N) \to (Q^1, \ldots, Q^N)$ に際し次のように変換する.

$$\nabla_X Y^\alpha \quad \to \quad \widetilde{\nabla_X Y^\alpha} = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\kappa} \nabla_X Y^\kappa,$$

$$\nabla_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y} = \nabla_X Y^\alpha \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\alpha} = \widetilde{\nabla_X Y^\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial Q^\alpha}.$$

共変微分 $\nabla_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y}$ は接ベクトル場として問題なく定義できる.

力学の話に戻る．

幾何学的加速度．

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^{\alpha} &= \frac{\mathrm{d}v^{\alpha}}{\mathrm{d}t} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} v^{\beta} v^{\gamma} \\ &= v^{\beta} \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial q^{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} v^{\beta} v^{\gamma} \\ &= \nabla_{v} v^{\alpha}.\end{aligned}$$

速度 $\boldsymbol{v}$ の運動軌道（$\boldsymbol{v}$ の積分曲線）に沿っての共変微分．

測地線：次の微分方程式の解である軌道．

$$\mathscr{A}^{\alpha} = \nabla_{v} v^{\alpha} = 0 \quad (v^{\alpha} = \dot{q}^{\alpha}).$$

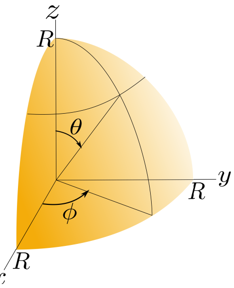
- 運動空間 M 上の自由運動（外力が働かない）．
- 運動空間 M 上の「等速運動」．
- 運動空間 M 上の「まっすぐな」運動．

（例）2 次元球面（半径 R）

$$M = \{\, \boldsymbol{r}(\theta, \phi) = R \sin\theta \cos\phi \, \boldsymbol{e}_x + R \sin\theta \sin\phi \, \boldsymbol{e}_y + R \cos\theta \, \boldsymbol{e}_z \,\}.$$

計量テンソル

$$g_{\theta\theta} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = R^2,$$
$$g_{\phi\phi} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = R^2 \sin^2\theta,$$
$$g_{\theta\phi} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = 0.$$

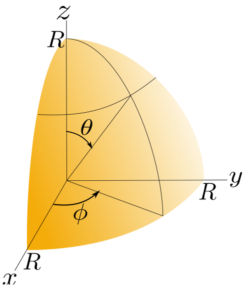


Christoffel の記号

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta, \qquad \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \cot\theta,$$

その他の成分は 0.

共変微分



接ベクトル場

$$\boldsymbol{X} = X^{\theta}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} + X^{\phi}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}$$

の共変微分

$$\nabla_{\theta}\boldsymbol{X} = \frac{\partial X^{\theta}}{\partial \theta}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial X^{\phi}}{\partial \theta} + \cot\theta X^{\phi}\right)\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi},$$

$$\nabla_{\phi}\boldsymbol{X} = \left(\frac{\partial X^{\theta}}{\partial \phi} - \sin\theta\cos\theta X^{\phi}\right)\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial X^{\phi}}{\partial \phi} + \cot\theta X^{\theta}\right)\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}.$$

Contents

平行移動

- 微分：僅かに離れた 2 点における値の差．
- 共変微分はどのような値の差を考えているのだろうか？

平行移動

- 微分：僅かに離れた 2 点における値の差．
- 共変微分はどのような値の差を考えているのだろうか？

異なる 2 点における接ベクトルは，異なるベクトル空間に属し，異なる変換則に従うから，直接比較する（差を取る）ことは不可能である．

平行移動

$\mathrm{P}(q), \mathrm{P}'(q+\Delta q)$ . . . $\boldsymbol{X}$ の積分曲線 $\left(\dfrac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}s} = X^\alpha(q)\right)$ 上の 2 点.

共変微分の定義を「差分」に書き直す.

$$\begin{aligned}\nabla_X Y^\alpha \Delta s &= Y^\alpha(q+\Delta q) - Y^\alpha(q) + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(q) Y^\gamma(q) \Delta q^\beta \\ &= Y^\alpha(\mathrm{P}') - Y^\alpha(\mathrm{P}) + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(\mathrm{P}) Y^\gamma(\mathrm{P}) \Delta q^\beta\end{aligned}$$

平行移動

$\mathrm{P}(q), \mathrm{P}'(q+\Delta q)$ ... $\boldsymbol{X}$ の積分曲線 $\left(\dfrac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}s} = X^\alpha(q)\right)$ 上の 2 点.

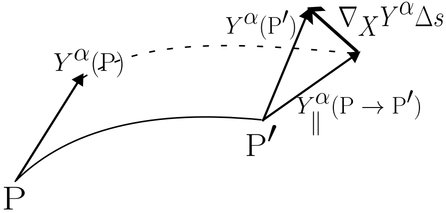
共変微分の定義を「差分」に書き直す.

$$\nabla_X Y^\alpha \Delta s = Y^\alpha(\mathrm{P}') - \underbrace{\left(Y^\alpha(\mathrm{P}) - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(\mathrm{P}) Y^\gamma(\mathrm{P}) \Delta q^\beta\right)}_{Y^\alpha_\parallel(\mathrm{P}\to\mathrm{P}')}.$$

接ベクトル Y^α の点 $\mathrm{P}(q)$ から点 $\mathrm{P}'(q+\Delta q)$ への平行移動.

$$Y^\alpha_\parallel(\mathrm{P} \to \mathrm{P}') := Y^\alpha(\mathrm{P}) - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(\mathrm{P}) Y^\gamma(\mathrm{P}) \Delta q^\beta.$$

共変微分：ベクトル場を点 P から点 P′ へ平行移動して差をとる.



Contents

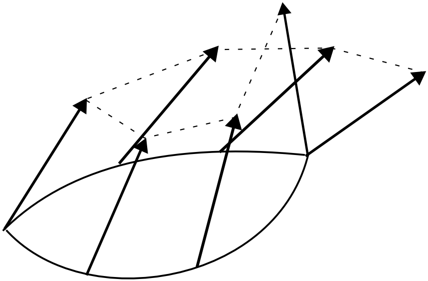
曲率

ベクトル場 X^α の点 $\mathrm{P}(q)$ から点 $\mathrm{P}'(q+\Delta q)$ への微小平行移動．

$$X^\alpha_\parallel(\mathrm{P}\to\mathrm{P}') = X^\alpha(\mathrm{P}) - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(\mathrm{P})X^\gamma(\mathrm{P})\Delta q^\beta.$$

有限な大きさだけ離れた 2 点間の平行移動．

．．．途中経路によって結果が変わる． $\longrightarrow$ 曲率．

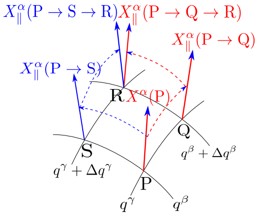


曲率

運動空間上の次の 4 点を頂点に持つ微小四角形を考える．

$$\mathrm{P}(q^\beta, q^\gamma),\ \mathrm{Q}(q^\beta+\Delta q^\beta, q^\gamma),\ \mathrm{R}(q^\beta+\Delta q^\beta, q^\gamma+\Delta q^\gamma),\ \mathrm{S}(q^\beta, q^\gamma+\Delta q^\gamma).$$

ベクトル $\boldsymbol{X}$ を P から S まで平行移動させると，
Q 経由と S 経由とで結果が変わる．



Q 経由 (P → Q → R)．
$*$ Einstein の規約は用いない．

$$X_\parallel^\alpha(\mathrm{P}\to\mathrm{Q}) = X^\alpha(\mathrm{P}) - \sum_\kappa \Gamma^\alpha_{\beta\kappa}(\mathrm{P})X^\kappa(\mathrm{P})\Delta q^\beta,$$

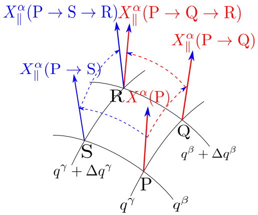
$$\begin{aligned}
&X_\parallel^\alpha(\mathrm{P}\to\mathrm{Q}\to\mathrm{R}) \\
&= X_\parallel^\alpha(\mathrm{P}\to\mathrm{Q}) - \sum_\mu \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}(\mathrm{Q})X_\parallel^\mu(\mathrm{P}\to\mathrm{Q})\Delta q^\gamma \\
&\simeq X^\alpha(\mathrm{P}) - \sum_\kappa \Gamma^\alpha_{\beta\kappa}(\mathrm{P})X^\kappa(\mathrm{P})\Delta q^\gamma \\
&\quad - \sum_\mu [\Gamma^\alpha_{\gamma\mu}(\mathrm{P}) + \sum_\kappa \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}(\mathrm{P})\Delta q^\beta][X^\mu(\mathrm{P}) - \sum_\nu \Gamma^\mu_{\beta\nu}(\mathrm{P})X^\nu \Delta q^\beta]\Delta q^\gamma
\end{aligned}$$

曲率

運動空間上の次の 4 点を頂点に持つ微小四角形を考える．

$$\mathrm{P}(q^\beta, q^\gamma),\ \mathrm{Q}(q^\beta + \Delta q^\beta, q^\gamma),\ \mathrm{R}(q^\beta + \Delta q^\beta, q^\gamma + \Delta q^\gamma),\ \mathrm{S}(q^\beta, q^\gamma + \Delta q^\gamma).$$

ベクトル $\boldsymbol{X}$ を P から S まで平行移動させると，
Q 経由と S 経由とで結果が変わる．



Q 経由 (P → Q → R)．
∗ Einstein の規約は用いない．

$$X^\alpha_\parallel(\mathrm{P}\to\mathrm{Q}) = X^\alpha(\mathrm{P}) - \sum_\kappa \Gamma^\alpha_{\beta\kappa}(\mathrm{P}) X^\kappa(\mathrm{P}) \Delta q^\beta,$$

$$\begin{aligned}
&X^\alpha_\parallel(\mathrm{P}\to\mathrm{Q}\to\mathrm{R}) \\
&\simeq X^\alpha(\mathrm{P}) - \sum_\kappa \Gamma^\alpha_{\beta\kappa}(\mathrm{P}) X^\kappa(\mathrm{P}) \Delta q^\beta - \sum_\mu \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}(\mathrm{P}) X^\mu(\mathrm{P}) \Delta q^\gamma \\
&\quad - \sum_{\mu,\kappa} \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}(\mathrm{P}) X^\mu(\mathrm{P}) \Delta q^\beta \Delta q^\gamma + \sum_{\mu,\nu} \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}(\mathrm{P}) \Gamma^\mu_{\beta\nu}(\mathrm{P}) X^\nu(\mathrm{P}) \Delta q^\beta \Delta q^\gamma,
\end{aligned}$$

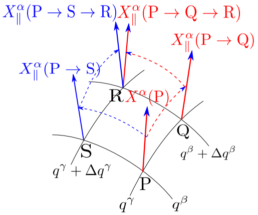
曲率

同様にして，ベクトル X^α を P $\to$ S $\to$ R を平行移動させると次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&X^\alpha_\parallel(\mathrm{P}\to\mathrm{S}\to\mathrm{R}) \\
\simeq\ & X^\alpha(\mathrm{P}) - \sum_\mu \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}(\mathrm{P})X^\mu(\mathrm{P})\Delta q^\gamma - \sum_\kappa \Gamma^\alpha_{\beta\kappa}(\mathrm{P})X^\kappa(\mathrm{P})\Delta q^\beta \\
&- \sum_\mu \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\mu}(\mathrm{P})X^\mu(\mathrm{P})\Delta q^\beta \Delta q^\gamma + \sum_{\mu,\nu} \Gamma^\alpha_{\beta\mu}(\mathrm{P})\Gamma^\mu_{\gamma\nu}(\mathrm{P})X^\nu(\mathrm{P})\Delta q^\beta \Delta q^\gamma .
\end{aligned}
$$

両者の差をとって，

$$
\begin{aligned}
&X^\alpha_\parallel(\mathrm{P}\to\mathrm{S}\to\mathrm{R}) - X^\alpha_\parallel(\mathrm{P}\to\mathrm{Q}\to\mathrm{R}) \\
\simeq & \sum_\mu \left(\partial_\beta \Gamma^\alpha_{\gamma\mu} - \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \sum_\nu (\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\nu_{\gamma\mu} - \Gamma^\alpha_{\gamma\nu}\Gamma^\nu_{\beta\mu}) \right) \\
&\times X^\mu \Delta q^\beta \Delta q^\gamma \\
=: & \sum_\mu R^\alpha_{\mu\beta\gamma} X^\mu \Delta q^\beta \Delta q^\gamma \quad \text{曲率テンソル.}
\end{aligned}
$$

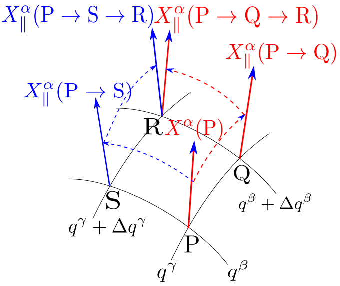


曲率

曲率テンソル ∗ Einstein の規約は用いない.

$$R^\alpha_{\mu\beta\gamma} := \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\gamma\mu} - \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \sum_\nu \left(\Gamma^\alpha_{\beta\nu} \Gamma^\nu_{\gamma\mu} - \Gamma^\alpha_{\gamma\nu} \Gamma^\nu_{\beta\mu} \right).$$

$$X^\alpha_\parallel(\mathrm{P} \to \mathrm{S} \to \mathrm{R}) - X^\alpha_\parallel(\mathrm{P} \to \mathrm{Q} \to \mathrm{R}) = \sum_\mu R^\alpha_{\mu\beta\gamma} X^\mu \Delta q^\beta \Delta q^\gamma.$$



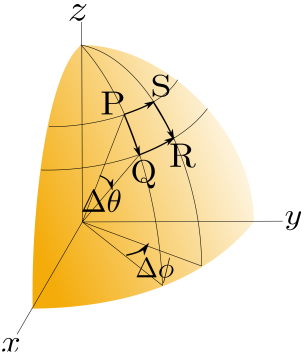
（例）2 次元球面（半径 R）

$$R^{\theta}_{\phi\theta\phi} = -R^{\theta}_{\phi\phi\theta} = \sin^2\theta, \quad R^{\phi}_{\theta\theta\phi} = -R^{\phi}_{\theta\phi\theta} = -1.$$

その他の R の成分は 0.

ベクトル場 $\boldsymbol{X} = X^{\theta}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\theta} + X^{\phi}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\phi}$ の平行移動.

$$X^{\theta}_{\parallel}(\mathrm{P}\to\mathrm{S}\to\mathrm{R}) - X^{\theta}_{\parallel}(\mathrm{P}\to\mathrm{Q}\to\mathrm{R})$$
$$= 2\sin^2\theta X^{\phi}\Delta\theta\Delta\phi,$$
$$X^{\phi}_{\parallel}(\mathrm{P}\to\mathrm{S}\to\mathrm{R}) - X^{\phi}_{\parallel}(\mathrm{P}\to\mathrm{Q}\to\mathrm{R})$$
$$= -2X^{\theta}\Delta\theta\Delta\phi.$$



Contents

まとめ

- 幾何学的運動方程式，幾何学的加速度．
- 共変微分：運動空間において数学的・物理的実体を持つ，反変ベクトル場の微分．

  座標変換において反変ベクトル場の変換則に従う．
- 運動空間における反変ベクトル場の平行移動．
- 曲率：運動空間の「曲がり」を記す．

  ベクトル場の平行移動の結果が途中経路により変わる．