力学からの微分幾何学 3
共変ベクトル場＝1 形式の線積分

緒方秀教

電気通信大学

June 13, 2023

はじめに

- 共変ベクトル：反変ベクトルの線形汎関数．
- 具体的にどういう関数なのだろう？

今日の内容．

- 一般化力 $\mathscr{F}_\alpha$ で与えられる共変ベクトル場 $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\alpha \mathrm{d}q^\alpha$ について，これが具体的にどういう汎関数を与えているのか，考察する．
- 外力のする仕事が共変ベクトル場 $\mathscr{F}$ の線積分で与えられることを見る．
- 一般の共変ベクトル場＝（微分）1 形式の線積分の定義．

Contents

Contents

共変ベクトル—線型汎関数

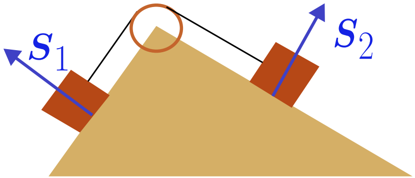
拘束を受けて運動する N_P 個の質点系の運動を考える．

$$
\begin{aligned}
\text{変位ベクトル}\quad & \boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \ldots, \boldsymbol{r}_{N_\mathrm{P}} = (x_{N_\mathrm{P}}, y_{N_\mathrm{P}}, z_{N_\mathrm{P}}), \\
\text{質量}\quad & m_1, \ldots, m_{N_\mathrm{P}}
\end{aligned}
$$

Newton 運動方程式

$$
m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{S}_i \quad (\, i = 1, \ldots, N_\mathrm{P} \,),
$$

$\boldsymbol{F}_i$ ： 外力（束縛力を除く）， $\boldsymbol{S}_i$ ： 束縛力．



共変ベクトル—線型汎関数

拘束を受けて運動する N_P 個の質点系の運動を考える．

$$\begin{array}{rl} \text{変位ベクトル} & \boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \ldots, \boldsymbol{r}_{N_\mathrm{P}} = (x_{N_\mathrm{P}}, y_{N_\mathrm{P}}, z_{N_\mathrm{P}}), \\ \text{質量} & m_1, \ldots, m_{N_\mathrm{P}} \end{array}$$

Newton 運動方程式

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{S}_i \quad (\, i = 1, \ldots, N_\mathrm{P}\,),$$

$$\boldsymbol{F}_i \ : \ \text{外力（束縛力を除く）}, \qquad \boldsymbol{S}_i \ : \ \text{束縛力}.$$

- 一般座標：運動を記述する N（＝自由度）個の独立なパラメータ $q^1, \ldots, q^N$

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q^1, \ldots, q^N) \quad (\, i = 1, \ldots, N_\mathrm{P}\,).$$

- 運動空間

$$M = \left\{ \boldsymbol{r}(q^1, \ldots, q^N) \,\middle|\, (q^1, \ldots, q^N) \in D \right\},$$

$$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_{N_\mathrm{P}}) \in \mathbb{R}^{3N_\mathrm{P}}, \qquad D \subset \mathbb{R}^N.$$

M 内で完結するような議論をしたい（束縛力 $\boldsymbol{S}_i$ は考えたくない）．

共変ベクトル─線型汎関数

幾何学的運動方程式（共変ベクトル場の方程式）．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^{\alpha}} = \mathscr{F}_{\alpha} \quad (\,\alpha = 1, \ldots, N\,), \tag{1}$$

$$T = T(q, \dot{q}) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{P}}} m_i \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} \right\|^2 \quad \text{運動エネルギー},$$

$$\mathscr{F}_{\alpha} := \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{P}}} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^{\alpha}} \quad \text{一般化力}.$$

- 式 (1) 両辺は共変ベクトル場の成分である．
- 共変ベクトル：線型汎関数 $T_{\mathrm{P}} \longrightarrow \mathbb{R}$
  T_{P}：点 $\mathrm{P} \in M$ における接ベクトル空間．
- では，一般化力 $\mathscr{F}_{\alpha}$ は具体的にどういう汎関数なのか？

共変ベクトル—線型汎関数

（拘束条件に従う）微小変位 $\Delta \boldsymbol{r}_i$ $(i = 1, \ldots, N_\mathrm{P})$ を質点系に加えたとき，外力がする仕事．

$$\Delta W := \sum_{i=1}^{N_\mathrm{P}} \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{N_\mathrm{P}} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} \Delta q^\alpha,$$
$$\therefore \quad \Delta W = \mathscr{F}_\alpha \Delta q^\alpha.$$

一般化力が与える線型汎関数 $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\alpha \mathrm{d}q^\alpha$

微小変位 $\Delta \boldsymbol{r} = \Delta q^\alpha \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\alpha}$

$\mapsto \mathscr{F}(\Delta \boldsymbol{r}) = \mathscr{F}_\alpha \Delta q^\alpha = \Delta W$. 微小変位がする仕事

Contents

1 形式の線積分

線型汎関数としての一般化力 $\mathscr{F}$：

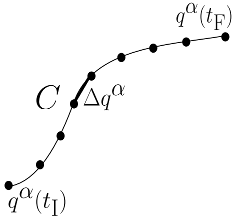
$$\text{微小変位 } \Delta \boldsymbol{r} \ \mapsto \ \text{微小仕事 } \Delta W = \mathscr{F}(\Delta \boldsymbol{r}) = \mathscr{F}_\alpha \Delta q^\alpha .$$

微小変化が現れたら，それを足して積分したくなる．

C：運動空間 M 上の曲線．

質点系を曲線 C に沿って動かしたとき，外力がする仕事．

$$W = \sum \Delta W = \sum \mathscr{F}_\alpha \Delta q^\alpha .$$



1 形式の線積分

線型汎関数としての一般化力 $\mathscr{F}$：

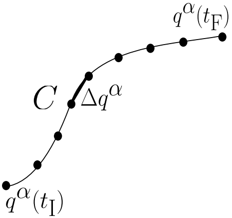
$$\text{微小変位 } \Delta \boldsymbol{r} \ \mapsto \ \text{微小仕事 } \Delta W = \mathscr{F}(\Delta \boldsymbol{r}) = \mathscr{F}_\alpha \Delta q^\alpha .$$

微小変化が現れたら，それを足して積分したくなる．

C：運動空間 M 上の曲線．

質点系を曲線 C に沿って動かしたとき，外力がする仕事．

$$W = \int_C \Delta W = \int_C \mathscr{F}_\alpha \Delta q^\alpha .$$



$*$ 記号 $\mathrm{d}q^\alpha$ は $\{\, \partial \boldsymbol{r} / \partial q^\alpha \,\}$ の双対基底としているので，
積分を次のように表記することがある．

$$\int \cdots \mathrm{d}q^\alpha \quad \to \quad \int \cdots \Delta q^\alpha, \ \text{etc.}$$

1 形式の線積分

線型汎関数としての一般化力 $\mathscr{F}$：

$$\text{微小変位 } \Delta\boldsymbol{r} \ \mapsto\ \text{微小仕事 } \Delta W = \mathscr{F}(\Delta\boldsymbol{r}) = \mathscr{F}_\alpha \Delta q^\alpha.$$

微小変化が現れたら，それを足して積分したくなる．

C：運動空間 M 上の曲線．

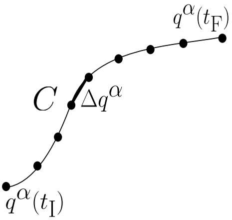
質点系を曲線 C に沿って動かしたとき，外力がする仕事．

$$W = \int_C \Delta W = \int_C \mathscr{F}_\alpha \Delta q^\alpha.$$

曲線 C をパラメータ表示する，

$$C \ : \ q^\alpha = q^\alpha(t) \quad (t_\mathrm{I} \leq t \leq t_\mathrm{F}).$$

$$W = \int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} \mathscr{F}_\alpha(q(t))\dot{q}^\alpha(t)\mathrm{d}t.$$



... 共変ベクトル場 $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\alpha \mathrm{d}q^\alpha$ の線積分．

外力のする仕事＝共変ベクトル場 $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\alpha \mathrm{d}q^\alpha$ の線積分

$$W = \int_C \mathscr{F} = \int_C \mathscr{F}_\alpha \mathrm{d}q^\alpha := \int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} \mathscr{F}_\alpha(q(t))\dot{q}^\alpha(t)\mathrm{d}t.$$

ここで，曲線 C はつぎのようにパラメータ表示している：

$$C \ : \ q^\alpha = q^\alpha(t) \quad (\alpha = 1, \ldots, N;\ t_\mathrm{I} \leq t \leq t_\mathrm{F}).$$

これを共変ベクトル場 $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\alpha \mathrm{d}q^\alpha$ の線積分の定義とする.

【注意】この $\mathscr{F}$ の線積分の定義は，座標変換 $(q^\alpha) \longrightarrow (Q^\alpha)$ で不変である，i.e.，座標変換で $\mathscr{F}_\alpha \longrightarrow \widetilde{\mathscr{F}}_\alpha$ と変換するならば

$$\int_C \mathscr{F} = \int_C \mathscr{F}_\alpha \mathrm{d}q^\alpha = \int_C \widetilde{\mathscr{F}}_\alpha \mathrm{d}Q^\alpha.$$

$$\Downarrow$$

これをもとに，一般の共変ベクトルの線積分を定義する.

1 形式の線積分

共変ベクトル場 $\longrightarrow$ これから（微分）1 形式と呼ぶことにする.

1 形式（共変ベクトル場）の線積分

- 1 形式 $\omega = \omega_\alpha \mathrm{d}q^\alpha$.
- 運動空間 M 上の曲線 C : $q^\alpha = q^\alpha(t)$ $(t_\mathrm{I} \leq t \leq t_\mathrm{F})$.
- 1 形式 ω の曲線 C 上の線積分.

$$\int_C \omega = \int_C \omega_\alpha \mathrm{d}q^\alpha := \int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} \omega_\alpha(q(t))\dot{q}^\alpha(t)\mathrm{d}t.$$

この 1 形式の線積分の定義は

- 曲線 C のパラメータ表示の選び方に依らない.
- 座標変換 $(q^\alpha) \longrightarrow (Q^\alpha)$ で不変である.

Contents

まとめ

- 共変ベクトル＝線型汎関数．
  具体的にどういう関数なのか？
- 一般化力：微小変位に対し外力がする微小仕事を与える．
- この微小量を足し算する（有限の変位による仕事）
  $\longrightarrow$ 外力がする仕事は一般化力 $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\alpha \mathrm{d}q^\alpha$ の線積分で表される．
- 【一般化】1 形式＝共変ベクトル場の線積分の定義．

予告

- 1 形式の線積分 ＝ ベクトル場の線積分．

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

- ベクトル解析に現れる諸々の積分．

$$\text{面積分} \quad \int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \qquad \text{体積分} \quad \int_V f \mathrm{d}V.$$

$\longrightarrow$ 高次の微分形式（交代多重形式）の積分で表される．