力学からの微分幾何学 (4)
微分形式とその積分

緒方秀教

電気通信大学

July 10, 2023

はじめに

本動画シリーズの趣旨：質点系力学の微分幾何学.

- N_{P} 個の質点系の制約条件つき運動．自由度 N.
- 運動空間（多様体）

$$M = \left\{ \boldsymbol{r}(q^1, \ldots, q^N) \in \mathbb{R}^{3N_{\mathrm{P}}} \;\middle|\; (q^1, \ldots, q^N) \in D \right\} \quad (\, D \subset \mathbb{R}^N \,).$$

$q = (q^1, \ldots, q^N)$：一般座標.

いま考えていること：運動空間（多様体）上の積分.

- ベクトル解析（3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$）におけるベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の線積分

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \lim \sum \omega_{\boldsymbol{A}}(\Delta \boldsymbol{r}),$$

$$\omega_{\boldsymbol{A}} := A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z \quad \text{（1 形式）}.$$

$\longrightarrow$ 1 形式の線積分.

- 面積分・体積分 $\longrightarrow$ 微分形式の積分．... これが今日の話題.

Contents

Contents

テンソル代数の準備

テンソル代数の一般論（V：実 N 次元ベクトル空間）

多重線型写像（p 階共変テンソル）

- V 上の p **重線型写像**：次を満たす写像 $\varphi : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p \text{ 個}} \to \mathbb{R}$.

$$\varphi(\ldots, cX_i + c' X_i', \ldots) = c\varphi(\ldots, X_i, \ldots) + c'\varphi(\ldots, X_i', \ldots)$$
$$(\, i = 1, \ldots, p; \ \ \ldots, X_i, X_i', \ldots \in V).$$

各変数 $X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_p$ について線型性が成り立つ.

- $\underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p \text{ 個}}$：$V$ 上の p 重線型写像全体からなるベクトル空間.

テンソル代数の準備

$V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ はベクトル空間
$\longrightarrow$ 「線型結合」を定義しなければならない．

φ_1, φ_2 の線型結合 $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \in V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$
... 次で定義される p 重線形写像：

$$\begin{aligned}(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p) \\ := c_1\varphi_1(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p) + c_2\varphi_2(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p).\end{aligned}$$

テンソル代数の準備

線型写像 $\omega_1, \ldots, \omega_p \in V^*$ のテンソル積

次で定義される p 重線型写像 $\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p \in V^* \otimes \cdots \otimes V^*$：

$$(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p)(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p) := \omega_1(\boldsymbol{X}_1) \cdots \omega_p(\boldsymbol{X}_p) \qquad (\ \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p \in V\ ).$$

$\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p$ が $V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ の元であること（各変数 $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p$ について線型性が成り立つこと）は，各自確かめること．

テンソル代数の準備

線型写像 $\omega_1, \ldots, \omega_p \in V^*$ のテンソル積

次で定義される p 重線型写像 $\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p \in V^* \otimes \cdots \otimes V^*$：

$$(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p)(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p) := \omega_1(\boldsymbol{X}_1) \cdots \omega_p(\boldsymbol{X}_p) \qquad (\ \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p \in V\ ).$$

演算 $\otimes$ には線型性を持たせることにする $(c, c' \in \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} &\omega_1 \otimes \cdots \otimes (c\omega_i + c'\omega_i') \otimes \cdots \otimes \omega_p \\ &\quad = c\, \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_i \otimes \cdots \otimes \omega_p + c'\, \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_i' \otimes \cdots \otimes \omega_p. \end{aligned}$$

テンソル代数の準備

線型写像 $\omega_1, \ldots, \omega_p \in V^*$ のテンソル積

次で定義される p 重線型写像 $\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p \in V^* \otimes \cdots \otimes V^*$：

$$(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p)(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p) := \omega_1(\boldsymbol{X}_1) \cdots \omega_p(\boldsymbol{X}_p) \qquad (\ \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p \in V\ ).$$

$\{\ \boldsymbol{e}_\alpha\ \}_{\alpha=1}^N$：$V$ の基底，$\{\ \boldsymbol{e}_*^\alpha\ \}_{\alpha=1}^N$：$V^*$ の双対基底：

$$\boldsymbol{e}_*^\alpha(\boldsymbol{e}_\beta) = \delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta). \end{cases}$$

任意の $\varphi \in V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ は次の形に一意的に表される：

$$\varphi = \varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \boldsymbol{e}_*^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_*^{\alpha_p} \quad (\ \varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = \varphi(\boldsymbol{e}_{\alpha_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\alpha_p})\ ).$$

$\left\{\ \boldsymbol{e}_*^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_*^{\alpha_p}\ \right\}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p = 1}^N$ は $V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ の基底．

$$\dim V^* \otimes \cdots \otimes V^* = N^p.$$

テンソル代数の準備

交代多重線型写像

- V 上の交代 p 重線型写像：
  p 重線型形式 $\varphi \in V^* \otimes V^*$ で次の反対称性を満たすもの．

$$\varphi(\dots, \boldsymbol{X}, \dots, \boldsymbol{Y}, \dots) = -\varphi(\dots, \boldsymbol{Y}, \dots, \boldsymbol{X}, \dots),$$
$$\text{とくに} \quad \varphi(\dots, \boldsymbol{X}, \dots, \boldsymbol{X}, \dots) = 0.$$

- $\Omega^p V^*$：V 上の線型 p 重線型写像全体からなるベクトル空間．

p 重交代線型形式 $\varphi \in \wedge^p V^*$ に対し次が成り立つ．

$$\varphi(\boldsymbol{X}_{\sigma(1)}, \dots, \boldsymbol{X}_{\sigma(p)}) = (\operatorname{sgn}\sigma)\varphi(\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_p) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_p),$$

ここで，

- $\mathfrak{S}_p$：$(1, 2, \dots, p)$ の置換の集合（p 次の対称群）．
- $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ に対し

$$\operatorname{sgn}\sigma := \begin{cases} +1 & \sigma \text{ は偶置換（偶数回の 2 数の入れ替え）}, \\ -1 & \sigma \text{ は奇置換（奇数回の 2 数の入れ替え）}. \end{cases}$$

テンソル代数の準備

くさび積 ∧

線型写像 $\omega_1, \ldots, \omega_p \in V^*$ の**くさび積 $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \in \Omega^p V^*$**：

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (\operatorname{sgn} \sigma) \omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(p)},$$

$$\text{とくに,} \quad \omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1 \otimes \omega_2 - \omega_2 \otimes \omega_1 \in \Omega^2 V^*.$$

- くさび積 ∧ の演算は**線型性**を持つ（$c, c' \in \mathbb{R}$, $\omega_1, \omega_1', \omega_2, \ldots, \omega_p \in V^*$）：

$$(c\omega_1 + c'\omega_1') \wedge \cdots \wedge \omega_p = c\,\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p + c'\,\omega_1' \wedge \cdots \wedge \omega_p, \quad \text{etc.}$$

-

$$\begin{aligned}(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (\operatorname{sgn} \sigma) \omega_{\sigma(1)}(\boldsymbol{X}_1) \cdots \omega_{\sigma(p)}(\boldsymbol{X}_p) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (\operatorname{sgn} \sigma) \omega_1(\boldsymbol{X}_{\sigma(1)}) \cdots \omega_p(\boldsymbol{X}_{\sigma(p)})\end{aligned}$$

$$\text{とくに,} \quad (\omega_1 \wedge \omega_2)(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \omega_1(\boldsymbol{X})\omega_2(\boldsymbol{Y}) - \omega_1(\boldsymbol{Y})\omega_2(\boldsymbol{X}).$$

テンソル代数の準備

くさび積 $\wedge$

線型写像 $\omega_1, \ldots, \omega_p \in V^*$ のくさび積 $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \in \Omega^p V^*$：

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (\operatorname{sgn} \sigma) \omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(p)},$$

$$\text{とくに,} \quad \omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1 \otimes \omega_2 - \omega_2 \otimes \omega_1 \in \Omega^2 V^*.$$

- くさび積演算 $\wedge$ の反可換性.

$$\omega_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(p)} = (\operatorname{sgn} \sigma) \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \quad (\, \sigma \in \mathfrak{S}_p \,),$$

$$\text{とくに,} \quad \omega_2 \wedge \omega_1 = -\omega_1 \wedge \omega_2.$$

- 同じものが 2 度現れるくさび積はゼロ.

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0$$

テンソル代数の準備

$\{ e_\alpha \}_{\alpha=1}^N$: V の基底，$\{ e_*^\alpha \}_{\alpha=1}^N$: V^* の双対基底．

- 任意の $\omega \in \Omega^p V^*$ は次の形に一意的に表される．

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{1}{p!}\omega_{\alpha_1\dots\alpha_p} e_*^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_*^{\alpha_p} \\
&= \sum_{\alpha_1<\cdots<\alpha_p} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} \omega_{\alpha_{\sigma(1)}\dots\alpha_{\sigma(p)}} e_*^{\alpha_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge e_*^{\alpha_{\sigma(p)}}
\end{aligned}$$

$$(\omega_{\alpha_1\dots\alpha_p} = \omega(e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_p})).$$

- 係数 $\omega_{\alpha_1\dots\alpha_p}$ は添字について反可換：$\omega_{\dots\beta\dots\gamma\dots} = -\omega_{\dots\gamma\dots\beta\dots}$．
- $\left\{ e_*^{\alpha_1} \wedge \cdots e_*^{\alpha_p} \,\middle|\, 1 \le \alpha_1 < \cdots < \alpha_p \le N \right\}$ は $\Omega^p V^*$ の基底，

$$\dim \Omega^p V^* = \binom{N}{p} = \frac{N!}{p!(N-p)!}.$$

- $p > N$ ならば $\Omega^p V^* = \{ 0 \}$．

  $\because$ $e_*^{\alpha_1}, \dots, e_*^{\alpha_p}$ の中に同じものが 2 度現れるから．

テンソル代数の準備

任意の $\omega \in \Omega^p V^*$ は次の形に一意的に表される．

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{p!}\omega_{\alpha_1\dots\alpha_p} e_*^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_*^{\alpha_p} \\ &= \sum_{\alpha_1<\cdots<\alpha_p} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} \omega_{\alpha_1\dots\alpha_p} e_*^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_*^{\alpha_p} \\ &\quad (\ \omega_{\alpha_1\dots\alpha_p} = \omega(e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_p})\ ).\end{aligned}$$

【証明】(1/2)

$$\omega = \omega_{\alpha_1\dots\alpha_p} e_*^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_*^{\alpha_p} \quad (\ \omega_{\alpha_1\dots\alpha_p} = \omega(e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_p})\ ).$$

係数 $\omega_{\alpha_1\dots\alpha_p}$ は添字について反可換であることを用いて，

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{\alpha_1<\cdots<\alpha_p} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} \omega_{\alpha_{\sigma(1)}\dots\alpha_{\sigma(p)}} e_*^{\alpha_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_*^{\alpha_{\sigma(p)}} \\ &= \sum_{\alpha_1<\cdots<\alpha_p} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} (\operatorname{sgn}\sigma)\omega_{\alpha_1\dots\alpha_p} e_*^{\alpha_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_*^{\alpha_{\sigma(p)}} \\ &= \sum_{\alpha_1<\cdots<\alpha_p} \omega_{\alpha_1\dots\alpha_p} e_*^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_*^{\alpha_p}.\end{aligned}$$

【証明（続）】(2/2) 一意性の証明.

$\omega = \dfrac{1}{p!}\widetilde{\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_p}} \boldsymbol{e}_*^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_*^{\alpha_p}$ とも表されるとする.

$$(\boldsymbol{e}_*^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_*^{\alpha_p})(\boldsymbol{e}_{\beta_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\beta_p}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (\operatorname{sgn} \sigma) \delta^{\alpha_1}_{\beta_{\sigma(1)}} \cdots \delta^{\alpha_p}_{\beta_{\sigma(p)}}$$

を用いて，

$$\begin{aligned}
\omega_{\beta_1\ldots\beta_p} &= \omega(\boldsymbol{e}_{\beta_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\beta_p}) \\
&= \frac{1}{p!}\widetilde{\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}} \boldsymbol{e}_*^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_*^{\alpha_1}(\boldsymbol{e}_{\beta_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\beta_p}) \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (\operatorname{sgn} \sigma) \widetilde{\omega_{\beta_{\sigma(1)}\ldots\beta_{\sigma(p)}}} \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \underbrace{(\operatorname{sgn} \sigma)^2}_{1} \widetilde{\omega_{\beta_1\ldots\beta_p}} = \widetilde{\omega_{\beta_1\ldots\beta_p}}, \\
\therefore \quad \widetilde{\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}} &= \omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}.
\end{aligned}$$

（証明了）

テンソル代数の準備

V の基底の入れ替え．

$$\{ e_\alpha \} \to \{ f_\alpha \}, \quad e_\alpha = C^\beta{}_\alpha f_\beta \quad \left((C^\beta{}_\alpha) \text{ は正則行列} \right).$$

- 双対基底の変換．

$$\{ e_*^\alpha \} \to \{ f_*^\alpha \}, \quad e_*^\alpha = (C^{-1})^\alpha{}_\beta f_*^\beta,$$

$$(C^{-1})^\alpha{}_\beta : ((C^{-1})^\alpha{}_\beta) \text{ は } (C^\alpha{}_\beta) \text{ の逆行列}$$

$$\left((C^{-1})^\alpha{}_\gamma C^\gamma_\beta = C^\alpha{}_\gamma (C^{-1})^\gamma_\beta = \delta^\alpha_\beta \right).$$

- ベクトルの係数の変換．

$$(V \text{ のベクトル}) \quad \boldsymbol{X} = X^\alpha e_\alpha = \widetilde{X^\alpha} f_\alpha, \quad \widetilde{X^\alpha} = C^\alpha{}_\beta X^\beta.$$

$$(V^* \text{ の線型写像}) \quad \omega = \omega_\alpha e_*^\alpha = \widetilde{\omega_\alpha} f_*^\alpha, \quad \widetilde{\omega_\alpha} = (C^{-1})^\beta{}_\alpha \omega_\beta.$$

テンソル代数の準備

V の基底の入れ替え.

$$\{\, e_\alpha \,\} \to \{\, f_\alpha \,\}, \quad e_\alpha = C^\beta{}_\alpha f_\beta \quad \left((C^\beta{}_\alpha) \text{ は正則行列} \right).$$

- p 重線型写像の係数の変換.

$$\xi = \xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} e_*^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_*^{\alpha_p} = \widetilde{\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}} f_*^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes f_*^{\alpha_p},$$
$$\widetilde{\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}} = (C^{-1})^{\beta_1}{}_{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot (C^{-1})^{\beta_p}{}_{\alpha_p} \xi_{\beta_1 \ldots \beta_p},$$

- 交代 p 重線型写像の係数の変換.

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} e_*^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_*^{\alpha_p} = \frac{1}{p!} \widetilde{\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}} f_*^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge f_*^{\alpha_p},$$
$$\widetilde{\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}} = (C^{-1})^{\beta_1}{}_{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot (C^{-1})^{\beta_p}{}_{\alpha_p} \xi_{\beta_1 \ldots \beta_p},$$

Contents

微分形式

運動空間 M 上の幾何学に戻る．

- N_P 個の質点系の制約条件つき運動．自由度 N．
- 運動空間

$$M = \left\{\, \boldsymbol{r}(q^1, \ldots, q^N) \in \mathbb{R}^{3N_\mathrm{P}} \;\middle|\; (q^1, \ldots, q^N) \in D \,\right\} \quad (\, D \subset \mathbb{R}^N\,).$$

$q = (q^1, \ldots, q^N)$：一般座標．

（微分）p 形式

接ベクトル空間 T_P（ $\mathrm{P} \in M$ ）上の交代 p 重線形写像．

$$\omega_\mathrm{P} = \frac{1}{p!}(\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p})_\mathrm{P}(\mathrm{d}q^{\alpha_1})_\mathrm{P} \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}q^{\alpha_p})_\mathrm{P}.$$

$\left\{ \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\alpha}\right)_\mathrm{P} \right\}_{\alpha=1,\ldots,N}$：$T_\mathrm{P}$ の基底，$\{\,(\mathrm{d}q^\alpha)_\mathrm{P}\,\}_{\alpha=1,\ldots,N}$：$T^*_\mathrm{P}$ の双対基底．

$$(\mathrm{d}q^\alpha)_\mathrm{P}\left(\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\beta}\right)_\mathrm{P}\right) = \delta^\alpha_\beta := \begin{cases} 1 & (\,\alpha = \beta\,) \\ 0 & (\,\alpha \neq \beta\,). \end{cases}$$

微分形式

- 下付き添字 $(\cdot)_\mathrm{P}$:「点 $\mathrm{P} \in M$ における値」を意味する．
- ω : $\mathrm{P} \mapsto \omega_\mathrm{P}$ （各点 $\mathrm{P} \in M$ に $\omega_\mathrm{P} \in T^*_\mathrm{P}$ を対応させる写像）．

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(q^1, \ldots, q^N)\mathrm{d}q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_p}.$$

- 係数の変換則．座標変換 $(q^1, \ldots, q^N) \to (Q^1, \ldots, Q^N)$ に対し，

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{p!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(q^1, \ldots, q^N)\mathrm{d}q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_p} \\ &= \frac{1}{p!}\widetilde{\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}}(Q^1, \ldots, Q^N)\mathrm{d}Q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}Q^{\alpha_p}\end{aligned}$$

であるとすると，

$$\widetilde{\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}} = \frac{\partial q^{\beta_1}}{\partial Q^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial q^{\beta_p}}{\partial Q^{\alpha_p}}\omega_{\beta_1\ldots\beta_p}.$$

$$\because \quad \mathrm{d}q^\alpha = \frac{\partial q^\alpha}{\partial Q^\beta}\mathrm{d}Q^\beta \quad \text{を用いる．}$$

2 形式の積分

自由度 $N = 3$，一般座標=デカルト座標 (x, y, z).

2 形式 ω の一般形（$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0$ etc. に注意）.

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\omega_{xy}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \omega_{xz}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \omega_{yx}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \right.$$
$$\left. +\omega_{yz}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \omega_{zx}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \omega_{zy}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y\right).$$

$\omega_{yx} = -\omega_{xy}$, $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, etc. に注意すると，

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_{yz}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \omega_{zx}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \omega_{xy}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &=: A_x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + A_y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + A_z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, =: \omega_{\boldsymbol{A}}, \end{aligned}$$

$$A_x := \omega_{yz}, \quad A_y := \omega_{zx}, \quad A_z := \omega_{xy},$$

$$\boldsymbol{A} := A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$$

（$\boldsymbol{e}_x$：x 軸方向の単位ベクトル，etc.）.

2 形式の面積分

2 つのベクトル場 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ に対し，2 形式 $\omega_{\boldsymbol{A}}$ を作用させる．

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = \boldsymbol{e}_x, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \boldsymbol{e}_y, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \boldsymbol{e}_z$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{d}x(\boldsymbol{e}_x) = 1, \ \mathrm{d}x(\boldsymbol{e}_y) = \mathrm{d}x(\boldsymbol{e}_z) = 0, \ \text{etc.}$$

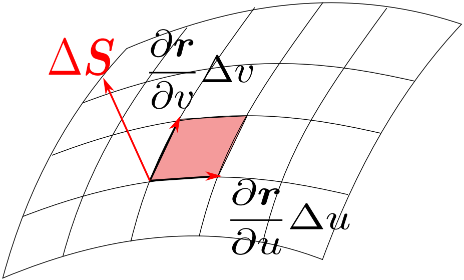
に注意すれば，

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) &= \mathrm{d}y(\boldsymbol{X})\mathrm{d}z(\boldsymbol{Y}) - \mathrm{d}z(\boldsymbol{X})\mathrm{d}y(\boldsymbol{Y}) \\
&= X_y Y_z - X_z Y_y = (\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y})_x, \quad \text{etc.}, \\
\omega_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) &= \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}) \\
&= A_x(X_y Y_z - X_z Y_y) + A_y(X_z Y_x - X_x Y_z) \\
&\quad + A_z(X_x Y_y - X_y Y_x).
\end{aligned}$$

2 形式の面積分

曲面　$S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) \quad ((u, v) \in S_0 \subset \mathbb{R}^2)$,

S を細分，各微小面素　$\Delta \boldsymbol{S} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\Delta u \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Delta v$.



$$\omega_{\boldsymbol{A}}(\Delta \boldsymbol{S}) := \omega_{\boldsymbol{A}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\Delta u, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Delta v\right) = \boldsymbol{A} \cdot \Delta \boldsymbol{S},$$

$$\int_S \boldsymbol{A} \cdot \Delta \boldsymbol{S} = \int_S \omega_{\boldsymbol{A}}(\Delta \boldsymbol{S}) = \lim \sum_i \omega_{\boldsymbol{A}}(\Delta \boldsymbol{S}_i).$$

2 形式の面積分

これを一般の N 自由度運動空間 M 上の 2 形式の積分に拡張する．

2 形式 ω の曲面 S 上の面積分

$$\int_S \omega := \int_S \omega(\Delta \boldsymbol{S}) = \lim \sum_i \omega(\Delta \boldsymbol{S}_i).$$

具体的な計算の仕方．

- 2 形式（座標表示）$\omega = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}(q)\mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\beta$.
- 曲面 S ： $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v), \quad (u, v) \in S_0 \subset \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\omega(\Delta \boldsymbol{S}) &= \omega\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\Delta u, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Delta v\right)\\ &= \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\beta \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right) \Delta u \Delta v.\end{aligned}$$

2 形式の面積分

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\beta \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right) &= \mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\beta \left(\frac{\partial q^\kappa}{\partial u} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\kappa}, \frac{\partial q^\lambda}{\partial v} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\lambda} \right) \\
&= \frac{\partial q^\kappa}{\partial q^\lambda} \frac{\partial q^\lambda}{\partial v} \underbrace{\mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\beta \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\kappa}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\lambda} \right)}_{\delta^\alpha_\kappa \delta^\beta_\lambda - \delta^\beta_\kappa \delta^\alpha_\lambda} \\
&= \frac{\partial (q^\alpha, q^\beta)}{\partial (u, v)}.
\end{aligned}
$$

2 形式 $\omega = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}(q)\mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\beta$ の曲面 S 上の面積分

$$
\int_S \omega = \frac{1}{2} \iint_{S_0} \omega_{\alpha\beta}(q(u,v)) \frac{\partial (q^\alpha, q^\beta)}{\partial (u, v)} \mathrm{d}u\mathrm{d}v,
$$

$$
S \ : \ q^\alpha = q^\alpha(u, v) \quad \left(\alpha = 1, \ldots, N; \ (u, v) \in S_0 \subset \mathbb{R}^2 \right).
$$

この面積分が一般座標 (q^α) の選び方，および，S のパラメータ付の仕方に依存しないことを確かめること．

Contents

一般の微分形式の積分

一般の p 形式 ω の p 次元領域 V 上の積分 $\displaystyle\int_V \omega$ を考える．

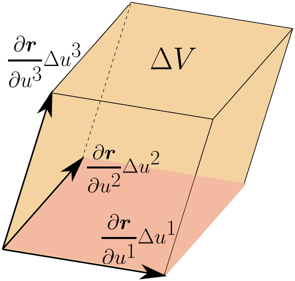
$$
\begin{aligned}
\omega &= \frac{1}{p!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\mathrm{d}q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\alpha_p},\\
V\ :\ q^\alpha &= q^\alpha(u^1,\ldots,u^p)\quad(\,\alpha=1,\ldots,N\,)\\
&\quad(\,(u^1,\ldots,u^p)\in V_0\subset\mathbb{R}^p\,).
\end{aligned}
$$

領域 V を微小 p 次元領域 ΔV に細分する．

各 ΔV は微小ベクトル

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}\Delta u^i\quad(\,i=1,\ldots,N\,)$$

が張る p 次元平行多面体である．



$p=3$ の場合．

一般の微分形式の積分

p 形式 ω の p 次元領域 V 上の積分

$$\int_V \omega := \int_V \omega(\Delta V) = \lim \sum_i \omega(\Delta V_i),$$

$$\omega(\Delta V) := \omega\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}\Delta u^1, \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}\Delta u^p\right).$$

具体的計算

$$\begin{aligned}
\omega(\Delta V) &:= \omega\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}\Delta u^1, \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}\Delta u^p\right) \\
&= \frac{1}{p!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\mathrm{d}q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\alpha_p}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}\Delta u^1, \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}\Delta u^p\right) \\
&= \frac{1}{p!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\frac{\partial(q^{\alpha_1}, \ldots, q^{\alpha_p})}{\partial(u^1, \ldots, u^p)}\Delta u^1\cdots\Delta u^p.
\end{aligned}$$

一般の微分形式の積分

p 形式 ω の p 次元領域 V 上の積分

$$\int_V \omega := \int_V \omega(\Delta V) = \lim \sum_i \omega(\Delta V_i),$$

$$\omega(\Delta V) := \omega\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}\Delta u^1, \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}\Delta u^p\right).$$

具体的計算

p 形式 ω の p 次元領域 V 上の積分（具体的な計算式）

$$\int_V \omega = \frac{1}{p!}\int \cdots \int_{V_0} \omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(q(u^1,\ldots,u^p))\frac{\partial(q^{\alpha_1},\ldots,q^{\alpha_p})}{\partial(u^1,\ldots,u^p)}\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^p.$$

$*$ 右辺は一般座標 (q^α) の選び方，および，V のパラメータ付けの仕方に依らない
（各自確認すること）.

一般の微分形式の積分

とくに，$M = \mathbb{R}^3$，$(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$ の場合．

$$\omega = f\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,$$

$$\int_V \omega = \iiint_{V_0} f(x(u), y(u), z(u)) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u^1, u^2, u^3)} \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2 \mathrm{d}u^3$$

（すべての 3 形式は単項式）．

$(u^1, u^2, u^3) = (x, y, z)$ ととれば，

$$\begin{aligned}\int_V \omega &= \int_V f\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ &= \iiint_V f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

ベクトル解析の体積分に一致する．

Contents

Contents

- 微分形式（＝交代多重線型写像）を導入.
- 微分形式の積分.

$$\int_V \omega := \int_V \omega(\Delta V) = \lim \sum_i \omega(\Delta V_i).$$

- なぜ,「微分形式＝交代多重線型写像」の積分を考えるのか？
  . . . 微分形式は「体積」を抽出するから.

次回の予定

- 外微分 $\mathrm{d}\omega$：微分形式 ω の微分.
- Stokes の定理. . . . 微積分の基本定理の拡張.

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a),$$

$$\longrightarrow \quad \int_V \mathrm{d}\omega = \int_{\partial V} \omega.$$