微分幾何学 (5)
外微分と Stokes の定理

緒方秀教

電気通信大学

August 3, 2023

はじめに

これまでやってきたこと．

- N_P 個の質点系の力学．

  各質点の位置ベクトル　$\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$　$(\, i = 1, \ldots, N_\mathrm{P}\,)$．

  質点系は拘束を受けて運動している．自由度 N．

- 運動空間 M：質点系が運動する空間（$\mathbb{R}^{3N_\mathrm{P}}$ 内の領域）．

$$M = \left\{\, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q^1, \ldots, q^N) \,\middle|\, (q^1, \ldots, q^N) \in D_0 \,\right\} \quad (D_0 \subset \mathbb{R}^N),$$
$$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_{N_\mathrm{P}}) = (x_1, y_1, z_1, \ldots, x_{N_\mathrm{P}}, y_{N_\mathrm{P}}, z_{N_\mathrm{P}}),$$
$$(q^1, \ldots, q^N) : \text{一般座標}.$$

- これまで，運動空間 M 上の微分幾何学を論じてきた．
  - 反変／共変ベクトル場．
  - 微分形式とその積分．
- 以降，質点系の力学という「物理」の話は出てこない．

はじめに

今回の内容：微積分の次の定理を拡張する．

- 微積分の基本定理．

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

- ベクトル解析の定理．

$$\int_C \mathrm{grad}\, f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(\boldsymbol{r}_{\mathrm{F}}) - f(\boldsymbol{r}_{\mathrm{I}}) \quad (\ \boldsymbol{r}_{\mathrm{I}}, \boldsymbol{r}_{\mathrm{F}}\ :\ C\ \text{の端点}\ ),$$

$$\int_S \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{\partial S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad \int_V \mathrm{div}\, \boldsymbol{A} \mathrm{d}V = \int_{\partial V} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

つまり，

$$\int (\text{微分}) = (\text{境界値}). \tag{1}$$

今回：運動空間 M 上では，(1) に対応するものとして何が成り立つか．

- 外微分：微分形式の微分（導関数）．
- Stokes の定理：(1) の拡張．

Contents

Contents

外微分

三次元 Euclid 空間 $M = \mathbb{R}^3$，デカルト座標 (x, y, z)．
ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y + A_z \boldsymbol{e}_z$ に対し，次の微分形式を考える．

$$\omega^{(1)}_{\boldsymbol{A}} := A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z,$$
$$\omega^{(2)}_{\boldsymbol{A}} := A_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + A_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + A_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$
$$\Downarrow$$
$$\int_C \omega^{(1)}_{\boldsymbol{A}} = \int_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \quad \int_S \omega^{(2)}_{\boldsymbol{A}} = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
(C ： 曲線, S ： 曲面).

ベクトル解析の定理（S：曲面，V：体領域）．

$$\int_S \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{\partial S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \quad \int_V \mathrm{div}\, \boldsymbol{A} \mathrm{d}V = \int_{\partial V} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

- $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A}$, $\mathrm{div}\, \boldsymbol{A}$ にはどういう微分形式が対応するだろうか？
- 微分形式の「微分」というものを考えたい．

外微分

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{\alpha_1\dots\alpha_p}\mathrm{d}q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\alpha_p} \quad : \quad \text{運動空間 } M \text{ 上の } p \text{ 形式.}$$

p 形式 ω の外微分

$$\mathrm{d}\omega := \frac{1}{p!}\frac{\partial\omega_{\alpha_1\dots\alpha_p}}{\partial q^\beta}\mathrm{d}q^\beta\wedge\mathrm{d}q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\alpha_p} \qquad ((p+1)\text{-形式}).$$

- とくに，スカラー値関数＝ 0 形式 f に対して

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\mathrm{d}q^\alpha = \frac{\partial f}{\partial q^1}\mathrm{d}q^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q^N}\mathrm{d}q^N.$$

- 外微分：形式的には次のように書ける．

$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{p!}\mathrm{d}\omega_{\alpha_1\dots\alpha_p}\wedge\mathrm{d}q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\alpha_p}.$$

外微分

外微分はベクトル解析の grad, rot, div の拡張である．

$M=\mathbb{R}^3$, 一般座標=デカルト座標 (x,y,z) の場合．
ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z$ に対して，次の微分形式を定義する．

$$\text{(1 形式)}\quad \omega^{(1)}_{\boldsymbol{A}}=A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z,$$
$$\text{(2 形式)}\quad \omega^{(2)}_{\boldsymbol{A}}=A_x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+A_y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+A_z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega^{(1)}_{\boldsymbol{A}} &= (\partial_x A_x\mathrm{d}x+\partial_y A_x\mathrm{d}y+\partial_z A_x\mathrm{d}z)\wedge\mathrm{d}x\\
&\quad+(\partial_x A_y\mathrm{d}x+\partial_y A_y\mathrm{d}y+\partial_z A_y\mathrm{d}z)\wedge\mathrm{d}y\\
&\quad+(\partial_x A_z\mathrm{d}x+\partial_y A_z\mathrm{d}y+\partial_z A_z\mathrm{d}z)\wedge\mathrm{d}z\\
&=(\partial_y A_z-\partial_z A_y)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(\partial_z A_x-\partial_x A_z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\\
&\quad+(\partial_x A_y-\partial_y A_x)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\
&=(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

外微分

外微分はベクトル解析の grad, rot, div の拡張である．

$M = \mathbb{R}^3$, 一般座標=デカルト座標 (x, y, z) の場合．
ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y + A_z \boldsymbol{e}_z$ に対して，次の微分形式を定義する．

$$(1\ \text{形式})\quad \omega^{(1)}_{\boldsymbol{A}} = A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z,$$

$$(2\ \text{形式})\quad \omega^{(2)}_{\boldsymbol{A}} = A_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + A_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + A_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega^{(1)}_{\boldsymbol{A}} &= \omega^{(2)}_{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}} \\
&= (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
\mathrm{d}\omega^{(2)}_{\boldsymbol{A}} &= (\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

rot $\boldsymbol{A}$, div $\boldsymbol{A}$ が微分形式の外微分で表現できた．

さらに，スカラー場 f に対して，

$$\mathrm{d}f = \omega^{(1)}_{\mathrm{grad}\,f} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

外微分

外微分は一般座標 (q^α) の選び方に依らない．

i.e., p 形式

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(q)\mathrm{d}q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\alpha_p}$$

が別の一般座標 (Q^α) を用いて

$$\omega = \frac{1}{p!}\widetilde{\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}}(Q)\mathrm{d}Q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}Q^{\alpha_p}$$

と表されるならば，

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{p!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(q)\mathrm{d}q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\alpha_p}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{1}{p!}\widetilde{\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}}(Q)\mathrm{d}Q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}Q^{\alpha^p}\right).$$

$*$ 証明は本 PC スライド末尾の「補遺」に記す．
PC スライドは概要欄に記した URL に置いてあります．

外微分

外微分を 2 回行うとゼロになる．

$$d^2\omega = 0.$$

【証明】$\omega = \dfrac{1}{p!}\omega_{\alpha_1\dots\alpha_p} dq^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dq^{\alpha_p}$ とする．

$$d\omega = \frac{1}{p!}\frac{\partial \omega_{\alpha_1\dots\alpha_p}}{\partial q^\beta} dq^\beta \wedge dq^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dq^{\alpha_p},$$

$$d^2\omega = \frac{1}{p!}\underbrace{\frac{\partial^2 \omega_{\alpha_1\dots\alpha_p}}{\partial q^\gamma \partial q^\beta}}_{(1)} \underbrace{dq^\gamma \wedge dq^\beta}_{(2)} \wedge dq^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dq^{\alpha_p}.$$

(1) は添字 β, γ の入れ替えに対して対称（不変），(2) は添字 β, γ の入れ替えに対して反対称（符号が反転する）から，上式 $= 0$ である．（証明了）

$$\left.\begin{array}{ll} S_{\alpha\beta} & :\text{添字の入れ替えに対して対称}\ (\ S_{\beta\alpha} = S_{\alpha\beta}\ ) \\ T^{\alpha\beta} & :\text{添字の入れ替えに対して反対称}\ (\ T^{\beta\alpha} = -T^{\alpha\beta}\ ) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad S_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = 0.$$

外微分を 2 回行うとゼロになる.

$$\mathrm{d}^2\omega = 0.$$

ベクトル解析（$M = \mathbb{R}^3$, デカルト座標）の場合．スカラー場 f，ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ に対して，

$$\begin{aligned}
\omega^{(1)}_{\boldsymbol{A}} &:= A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z, \\
\omega^{(2)}_{\boldsymbol{A}} &:= A_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + A_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + A_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}f = \omega^{(1)}_{\mathrm{grad}\, f}, \quad \mathrm{d}\omega^{(1)}_{\boldsymbol{A}} = \omega^{(2)}_{\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A}}, \quad \mathrm{d}\omega^{(2)}_{\boldsymbol{A}} = (\mathrm{div}\, \boldsymbol{A}) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

であったから，スカラー場 f に対して

$$0 = \mathrm{d}^2 f = \mathrm{d}\omega^{(1)}_{\mathrm{grad}\, f} = \omega^{(2)}_{\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f}.$$

$$\therefore \quad \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = 0 \quad \text{（ベクトル解析でよく知られた公式）.}$$

外微分

$*$ p-形式に対する外微分を d_p と記すことにする．

- 閉形式：$\mathrm{d}\omega = 0$ となるような微分形式 ω．

$$\ker \mathrm{d}_p := \{\, \omega \in \Omega^p M \mid \mathrm{d}_p\omega = 0 \,\}\,.$$

- 完全形式：微分形式 ω である微分形式 η を用いて $\omega = \mathrm{d}\eta$ と表されるもの．

$$\mathrm{im}\, \mathrm{d}_{p-1} := \left\{\, \mathrm{d}_{p-1}\eta \,\middle|\, \eta \in \Omega^{p-1} M \,\right\}.$$

$\mathrm{d}^2 = 0$ より，完全形式は閉形式である：

$$\mathrm{im}\, \mathrm{d}_{p-1} \subset \ker \mathrm{d}_p.$$

逆「閉形式は完全形式である」は成立するか？

$\Rightarrow$ 空間 M の位相幾何学的性質による（de Rham コホモロジー）．

$$H^p(M) := \ker \mathrm{d}_p / \,\mathrm{im}\, \mathrm{d}_{p-1} \quad \text{de Rham コホモロジー群．}$$

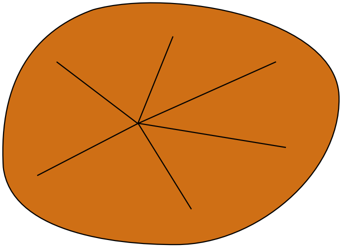
外微分

Poincaré の補題

M が星形閉集合ならば，M 上の閉形式は完全形式である．

$$H^p(M) := \ker \mathrm{d}_p / \operatorname{im} \mathrm{d}_{p-1} = \{\, 0 \,\}\,.$$

集合 M は星形である：ある点 $\mathrm{P}_0 \in M$ が存在して，任意の点 P に対し 2 点 P_0，P を結ぶ線分は M に含まれる．



【例】$M = \mathbb{R}^N$ 上では閉形式は完全形式である．

外微分

微分形式のくさび積

$$p\text{ 形式}\quad \omega = \frac{1}{p!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\mathrm{d}q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\alpha_p},$$

$$q\text{ 形式}\quad \eta = \frac{1}{q!}\eta_{\beta_1\ldots\beta_q}\mathrm{d}q^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\beta_q}.$$

$(p+q)$ 形式 $\omega\wedge\eta$

$$\omega\wedge\eta := \frac{1}{p!q!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\eta_{\beta_1\ldots\beta_q}\mathrm{d}q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\alpha_p}\wedge\mathrm{d}q^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{\beta_q}.$$

$\omega\wedge\eta$ は一般座標 (q^α) の選び方によらない．

くさび積の外微分

p 形式 ω，q 形式 η に対して，

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\eta) = \mathrm{d}\omega\wedge\eta + (-1)^p\omega\wedge\mathrm{d}\eta.$$

∗ 証明は PC スライド末尾の「補遺」に記す．
PC スライドは概要欄の URL に置いておきます．

Contents

Stokes の定理

$$\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{\partial S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \quad \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{A} \mathrm{d}V = \int_{\partial V} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

微分形式を使って表す．

$$\int_S \omega^{(2)}_{\operatorname{rot} \boldsymbol{A}} = \int_{\partial S} \omega^{(1)}_{\boldsymbol{A}}, \quad \int_V \omega^{(3)}_{\operatorname{div} \boldsymbol{A}} = \int_{\partial V} \omega^{(2)}_{\boldsymbol{A}}.$$

$$\omega^{(2)}_{\operatorname{rot} \boldsymbol{A}} = \mathrm{d}\omega^{(1)}_{\boldsymbol{A}}, \quad \omega^{(3)}_{\operatorname{div} \boldsymbol{A}} = \mathrm{d}\omega^{(2)}_{\boldsymbol{A}}$$

であったから，

$$\int_S \mathrm{d}\omega^{(1)}_{\boldsymbol{A}} = \int_{\partial S} \omega^{(1)}_{\boldsymbol{A}}, \quad \int_V \mathrm{d}\omega^{(2)}_{\boldsymbol{A}} = \int_{\partial V} \omega^{(2)}_{\boldsymbol{A}}.$$

微分形式を使うと，2 つの公式は同じ形に表される．

Stokes の定理

$$\int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{\partial S} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad \int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\mathrm{d}V = \int_{\partial V} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

微分形式を使って表す．

$$\int_S \omega^{(2)}_{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}} = \int_{\partial S} \omega^{(1)}_{\boldsymbol{A}}, \qquad \int_V \omega^{(3)}_{\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}} = \int_{\partial V} \omega^{(2)}_{\boldsymbol{A}}.$$

$$\omega^{(2)}_{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}} = \mathrm{d}\omega^{(1)}_{\boldsymbol{A}}, \qquad \omega^{(3)}_{\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}} = \mathrm{d}\omega^{(2)}_{\boldsymbol{A}}$$

であったから，

$$\int_S \mathrm{d}\omega^{(1)}_{\boldsymbol{A}} = \int_{\partial S} \omega^{(1)}_{\boldsymbol{A}}, \qquad \int_V \mathrm{d}\omega^{(2)}_{\boldsymbol{A}} = \int_{\partial V} \omega^{(2)}_{\boldsymbol{A}}.$$

微分形式を使うと，2 つの公式は同じ形に表される．

この等式は任意の N 自由度運動空間 M の任意の微分 p 形式に対しても成り立つ．

Stokes の定理

$$\int_C \mathrm{d}\omega = \int_{\partial C} \omega.$$

- ω：運動空間 M 上の $(p-1)$ 形式.
- C：運動空間 M 内の p 次元積分領域.

Stokes の定理

Stokes の定理

$$\int_C \mathrm{d}\omega = \int_{\partial C} \omega.$$

- ω：運動空間 M 上の $(p-1)$ 形式．
- C：運動空間 M 内の p 次元積分領域．

$$\int (\text{微分}) = (\text{境界値}).$$

微積分の基本定理，ベクトル解析の定理（Stokes の定理，etc.）の拡張である．

Stokes の定理

ω が 1 形式あるいは 2 形式の場合，Stokes の定理はベクトル解析の知識を用いて次のようにして証明できる．

$$\omega = \omega_\alpha \mathrm{d}q^\alpha \quad 1 \text{ 形式},$$

$$C: \ q^\alpha = q^\alpha(u,v), \quad (u,v) \in C_0 (\subset \mathbb{R}^2) \quad \text{運動空間 } M \text{ 上の 2 次元曲面}.$$

まず，1 形式 ω の外微分は次の通り．

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial \omega_\beta}{\partial q^\alpha} \mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\beta.$$

積分 $\displaystyle\int_C \mathrm{d}\omega$ は定義より次のように計算される．

$$\begin{aligned}
\int_C \mathrm{d}\omega &= \iint_{C_0} \frac{\partial \omega_\beta}{\partial q^\alpha}(q(u,v)) \frac{\partial(q^\alpha, q^\beta)}{\partial(u,v)} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \iint_{C_0} \frac{\partial \omega_\beta}{\partial q^\alpha} \left(\frac{\partial q^\alpha}{\partial u} \frac{\partial q^\beta}{\partial v} - \frac{\partial q^\alpha}{\partial v} \frac{\partial q^\beta}{\partial u} \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

（合成関数の微分の公式により）

$$= \iint_{C_0} \left(\frac{\partial \omega_\beta}{\partial u} \frac{\partial q^\beta}{\partial v} - \frac{\partial \omega_\beta}{\partial v} \frac{\partial q^\beta}{\partial u} \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Stokes の定理

$$\int_C \mathrm{d}\omega = \ldots = \iint_{C_0} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\omega_\beta \frac{\partial q^\beta}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\omega_\beta \frac{\partial q^\beta}{\partial u} \right) \right] \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

（ベクトル解析の Green の定理より）

$$= \oint_{\partial C_0} \omega_\beta \left(\frac{\partial q^\beta}{\partial u} \mathrm{d}u + \frac{\partial q^\beta}{\partial v} \mathrm{d}v \right)$$

(∂C_0 を $(u, v) = (u(t), v(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$ とパラメタ表示して）

$$= \int_{t_0}^{t_1} \omega_\beta \left(\frac{\partial q^\beta}{\partial u} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial q^\beta}{\partial v} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \omega_\beta(q(u(t), v(t))) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q^\beta(u(t), v(t)) \mathrm{d}t.$$

$q^\alpha = q^\alpha(u(t), v(t))$ $(\alpha = 1, \ldots, N;\ t_0 \leq t \leq t_1)$ は ∂C のパラメータ表示のひとつであるから，1 形式の積分の定義より，

$$\int_C \mathrm{d}\omega = \text{最右辺} = \int_{\partial C} \omega.$$

Stokes の定理

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{\beta\gamma}\mathrm{d}q^\beta \wedge \mathrm{d}q^\gamma \quad 2\text{ 形式},$$

$C \;:\; q^\alpha = q^\alpha(u, v, w), \quad (u, v, w) \in C_0(\subset \mathbb{R}^3)$ 運動空間 M 上の 3 次元領域.

まず，2 形式 ω の外微分は次の通り．

$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}\frac{\partial \omega_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha}\mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}q^\beta \wedge \mathrm{d}q^\gamma.$$

積分 $\displaystyle\int_C \mathrm{d}\omega$ は定義より次のように計算される．

$$\int_C \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}\iiint_{C_0} \frac{\partial \omega_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha}(q(u, v, w))\frac{\partial(q^\alpha, q^\beta, q^\gamma)}{\partial(u, v, w)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

ここで被積分関数は行列式の計算により次のように変形される．

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \omega_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha}\frac{\partial(q^\alpha, q^\beta, q^\gamma)}{\partial(u, v, w)} \\ &\qquad = \frac{\partial \omega_{\beta\gamma}}{\partial u}\frac{\partial(q^\beta, q^\gamma)}{\partial(v, w)} + \frac{\partial \omega_{\beta\gamma}}{\partial v}\frac{\partial(q^\beta, q^\gamma)}{\partial(w, u)} + \frac{\partial \omega_{\beta\gamma}}{\partial w}\frac{\partial(q^\beta, q^\gamma)}{\partial(u, v)}.\end{aligned}$$

Stokes の定理

さらに，

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial(q^\beta,q^\gamma)}{\partial(v,w)}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial(q^\beta,q^\gamma)}{\partial(w,u)}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial(q^\beta,q^\gamma)}{\partial(u,v)}\right)=0 \qquad (2)$$

が成り立つから（証明は本 PC スライド末尾の「補遺」に記す），次を得る．

$$\begin{aligned}\int_C \mathrm{d}\omega &= \frac{1}{2}\iiint_{C_0}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\omega_{\beta\gamma}\frac{\partial(q^\beta,q^\gamma)}{\partial(v,w)}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\omega_{\beta\gamma}\frac{\partial(q^\beta,q^\gamma)}{\partial(w,u)}\right)\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\partial}{\partial w}\left(\omega_{\beta\gamma}\frac{\partial(q^\beta,q^\gamma)}{\partial(u,v)}\right)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\ &=\frac{1}{2}\iint_{\partial C_0}\omega_{\beta\gamma}\left[\frac{\partial(q^\beta,q^\gamma)}{\partial(v,w)}n_u+\frac{\partial(q^\beta,q^\gamma)}{\partial(w,u)}n_v+\frac{\partial(q^\beta,q^\gamma)}{\partial(u,v)}n_w\right]\mathrm{d}S,\end{aligned}$$

ここで，(n_u,n_v,n_w) は $\mathbb{R}^3$ 内の閉曲面 ∂C_0 の外向き単位法線ベクトルであり，
ベクトル解析における Gauss の発散定理を用いた．
ここで，曲面 ∂C_0 を次のようにパラメータ表示する．

$$\partial C_0\ :\ u=u(s,t),\ v=v(s,t),\ w=w(s,t),\quad (s,t)\in S_0(\subset\mathbb{R}^2).$$

すると，法線ベクトル (n_u,n_v,n_w) を s,t を用いて表すことにより，
積分はさらに次のように変形される．

Stokes の定理

$$\int_C \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}\iint_{S_0} \omega_{\beta\gamma}\left[\frac{\partial(q^\beta, q^\gamma)}{\partial(v, w)}\frac{\partial(v, w)}{\partial(s, t)} + \frac{\partial(q^\beta, q^\gamma)}{\partial(w, u)}\frac{\partial(w, u)}{\partial(s, t)} + \frac{\partial(q^\beta, q^\gamma)}{\partial(u, v)}\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

ここで，

$$\text{青字部分} = \frac{\partial(q^\beta, q^\gamma)}{\partial(s, t)}$$

が簡単だが面倒な計算により示されるので，

$$\begin{aligned}\int_C \mathrm{d}\omega &= \frac{1}{2}\iint_{S_0} \omega\frac{\partial(q^\beta, q^\gamma)}{\partial(s, t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\iint_{\partial C} \omega_{\beta\gamma}\mathrm{d}q^\beta \wedge \mathrm{d}q^\gamma = \int_{\partial C} \omega\end{aligned}$$

を得る． （証明了）

Stokes の定理

一般の p 形式の場合．
（そもそも，高次元空間内の領域に対し境界をどう与えるか，自明でない．）

証明は本 PC スライド末尾の補遺に記す．
$*$ 概要欄の URL に PC スライドを置いておきます．

証明の方針．

1. 単体・鎖を導入 ... 高次元多面体を代数的に与えたもの．
   単体・鎖の境界：代数的に与える．
2. 積分領域として単体・鎖を写像により写したものを考える．
   $\longrightarrow$ 高次元の積分領域に対して境界が定義できる．
3. 微分形式の写像による「引き戻し」を考える．
   $\longrightarrow$ 積分の問題を積分領域が単体・鎖である場合に帰着させる．

Contents

まとめ

1. 微分形式 ω の外微分 $\mathrm{d}\omega$ を定義した．
   - 通常の微分の微分形式への拡張．
   - ベクトル解析における grad, rot, div の拡張．
2. Stoke の定理．

$$\int_C \mathrm{d}\omega = \int_{\partial C} \omega.$$

   - ベクトル解析における Stokes の定理・Gauss の発散定理の拡張．

$$\int (\text{微分}) = (\text{境界値}).$$

補遺：外微分が座標によらないことの証明

【証明】座標変換に伴う変換則

$$\widetilde{\omega_{\alpha_1\dots\alpha_p}} = \frac{\partial q^{\beta_1}}{\partial Q^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial q^{\beta_1}}{\partial Q^{\alpha_p}} \omega_{\beta_1\dots\beta_p}, \qquad \mathrm{d}q^{\alpha} = \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial Q^{\beta}} \mathrm{d}Q^{\beta}$$

を用いる．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\left(\frac{1}{p!}\widetilde{\omega_{\alpha_1\dots\alpha_p}}(Q)\mathrm{d}Q^{\alpha_1} \wedge \mathrm{d}Q^{\alpha^p}\right) \\
&= \frac{1}{p!}\frac{\partial\widetilde{\omega_{\alpha_1\dots\alpha_p}}}{\partial Q^{\beta}} \mathrm{d}Q^{\beta} \wedge \mathrm{d}Q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}Q^{\alpha_p} \\
&= \frac{1}{p!}\frac{\partial}{\partial Q^{\beta}}\left(\frac{\partial q^{\kappa_1}}{\partial Q^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial q^{\kappa_p}}{\partial Q^{\alpha_p}} \omega_{\kappa_1\dots\kappa_p}\right) \mathrm{d}Q^{\beta} \wedge \mathrm{d}Q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}Q^{\alpha_p} \\
&= \frac{1}{p!}\left(\frac{\partial q^{\kappa_1}}{\partial Q^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial q^{\kappa_p}}{\partial Q^{\alpha_p}} \frac{\partial \omega_{\kappa_1\dots\kappa_p}}{\partial Q^{\beta}} + \frac{\partial^2 q^{\kappa_1}}{\partial Q^{\beta}\partial Q^{\alpha_1}} \frac{\partial q^{\kappa_2}}{\partial Q^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial q^{\kappa_p}}{\partial Q^{\alpha_p}} \omega_{\kappa_1\dots\kappa_p} + \cdots\right) \\
&\quad \times \mathrm{d}Q^{\beta} \wedge \mathrm{d}Q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}Q^{\alpha_p}.
\end{aligned}$$

補遺：外微分が座標によらないことの証明

【証明（続）】

$$
\begin{aligned}
(\text{第 1 項}) &= \frac{1}{p!}\frac{\partial q^{\kappa_1}}{\partial Q^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial q^{\kappa_p}}{\partial Q^{\alpha_p}}\frac{\partial \omega_{\kappa_1\ldots\kappa_p}}{\partial Q^{\beta}}\mathrm{d}Q^{\beta}\wedge \mathrm{d}Q^{\alpha_1}\wedge \mathrm{d}Q^{\alpha_p} \\
&= \frac{1}{p!}\frac{\partial \omega_{\kappa_1\ldots\kappa_p}}{\partial Q^{\beta}}\mathrm{d}Q^{\beta}\wedge\frac{\partial q^{\kappa_1}}{\partial Q^{\alpha_1}}\mathrm{d}Q^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial q^{\kappa_p}}{\partial Q^{\alpha_p}}\mathrm{d}Q^{\alpha_p} \\
&= \frac{1}{p!}\frac{\partial \omega_{\kappa_1\ldots\kappa_p}}{\partial q^{\lambda}}\mathrm{d}q^{\lambda}\wedge \mathrm{d}q^{\kappa_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}q^{\kappa_p}, \\
(\text{第 2 項}) &= \frac{1}{p!}\omega_{\kappa_1\ldots\kappa_p}\underbrace{\frac{\partial^2 q^{\kappa_1}}{\partial Q^{\beta}\partial Q^{\alpha_1}}\mathrm{d}Q^{\beta}\wedge \mathrm{d}Q^{\alpha_1}}_{0\,*}\wedge\frac{\partial q^{\kappa_2}}{\partial Q^{\alpha_2}}\mathrm{d}Q^{\alpha_1}\wedge\cdots \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

同様にして，第 3 項以降も 0 であることが示される．

以上より，題意の等式が証明された． （証明了）

* 次を用いた：

$$
\left.
\begin{aligned}
&S_{\alpha\beta}\ \text{:添字の入れ替えに対して対称}\ (\ S_{\beta\alpha}=S_{\alpha\beta}\ ) \\
&T^{\alpha\beta}\ \text{:添字の入れ替えに対して反対称}\ (\ T^{\beta\alpha}=-T^{\alpha\beta}\ )
\end{aligned}
\right\}
\quad\Rightarrow\quad S_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}=0.
$$

補遺：くさび積 $\omega \wedge \eta$ の外微分の公式の証明

p 形式 ω，q 形式 η に対して，

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}\eta.$$

【証明】ω, η を座標 (q^α) を用いて次のように表す．

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\mathrm{d}q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_p}, \quad \eta = \frac{1}{q!}\eta_{\beta_1\ldots\beta_q}\mathrm{d}q^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\beta_q}.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) &= \frac{1}{p!q!}\mathrm{d}\left(\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\eta_{\beta_1\ldots\beta_q}\mathrm{d}q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_p} \wedge \mathrm{d}q^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\beta_q}\right) \\
&= \frac{1}{p!q!}\frac{\partial}{\partial q^\gamma}\left(\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_p}\eta_{\beta_1\cdots\beta_q}\right)\mathrm{d}q^\gamma \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_p} \\
&\qquad\qquad \wedge \mathrm{d}q^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\beta_q} \\
&= \frac{1}{p!q!}\left(\frac{\partial\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}}{\partial q^\gamma}\eta_{\beta_1\ldots\beta_q} + \omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\frac{\partial\eta_{\beta_1\ldots\beta_q}}{\partial q^\gamma}\right) \\
&\qquad \times \mathrm{d}q^\gamma \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_p} \wedge \mathrm{d}q^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\beta_q}.
\end{aligned}$$

補遺：くさび積 $\omega \wedge \eta$ の外微分の公式の証明

くさび積 $\wedge$ の反可換性より，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) &= \frac{1}{p!}\frac{\partial \omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}}{\partial q^\gamma}\mathrm{d}q^\gamma \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_p} \wedge \frac{1}{q!}\eta_{\beta_1\ldots\beta_q}\mathrm{d}q^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\beta_q} \\
&\quad +(-1)^p\frac{1}{p!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\mathrm{d}q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_p} \\
&\qquad\qquad \wedge \frac{1}{q!}\frac{\partial \eta_{\beta_1\ldots\beta_q}}{\partial q^\gamma}\mathrm{d}q^\gamma \wedge \mathrm{d}q^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\beta_q} \\
&= \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}\eta.
\end{aligned}
$$

（証明了）

補遺：(2) の証明

一般に，f, g を u, v, w の関数とするとき，次が成り立つ．

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(v,w)}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(w,u)}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right)=0.$$

これを証明すればよい．1 形式

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v+\frac{\partial f}{\partial w}\mathrm{d}w, \\ \mathrm{d}g &= \frac{\partial g}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial g}{\partial v}\mathrm{d}v+\frac{\partial g}{\partial w}\mathrm{d}w \end{aligned}$$

を考えると，外微分の性質 $\mathrm{d}^2=0$ より

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}g)=\mathrm{d}^2f\wedge\mathrm{d}g-\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}^2g=0$$

が成り立つ．一方，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}g = {} & (\mathrm{grad}\, f\times\mathrm{grad}\, g)_u\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}w+(\mathrm{grad}\, f\times\mathrm{grad}\, g)_v\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}u \\ & +(\mathrm{grad}\, f\times\mathrm{grad}\, g)_w\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v \end{aligned}$$

（下付き添字 $(\cdot)_u$ は u 成分を意味する，etc.）であるから，

(2) の証明

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathrm{d}(\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{grad}\, f \times \mathrm{grad}\, g)_u + \frac{\partial}{\partial v}(\mathrm{grad}\, f \times \mathrm{grad}\, g)_v \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial w}(\mathrm{grad}\, f \times \mathrm{grad}\, g)_w \right] \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}w
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ゆえに，

$$
\begin{aligned}
\text{題意の式の左辺} &= \frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{grad}\, f \times \mathrm{grad}\, g)_u + (\mathrm{grad}\, f \times \mathrm{grad}\, g)_v \\
&\qquad + (\mathrm{grad}\, f \times \mathrm{grad}\, g)_w = 0
\end{aligned}
$$

を得る． （証明了）

補遺：Stokes の定理の証明

これから，Stokes の定理を証明する．
証明は 3 段階に分けて行う．

1. （準備）微分形式の引き戻し．
2. 単体・鎖の導入 . . . 高次元の多面体を代数的に表したもの．
   - 単体・鎖に対し境界を代数的に定義する．
   - 前項の引き戻しにより，問題を単体・鎖の上の積分の場合に帰着させる．
3. Stokes の定理を単体・鎖の上の積分について証明する．

補遺：Stokes の定理の証明

(Step 1/3) 微分形式の引き戻し

- $\widetilde{M}$ . . . もう一つの運動空間．自由度 $\tilde{N}$，一般座標 $(\widetilde{q^1}, \ldots, \widetilde{q^{\tilde{N}}})$.
- φ : $\widetilde{M} \to M$, $(\widetilde{q^1}, \ldots, \widetilde{q^{\tilde{N}}}) \mapsto (q^1, \ldots, q^N)$ . . . 可微分全単射.
- $\omega = \dfrac{1}{p!}\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_N}(q)\mathrm{d}q^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{\alpha_N}$ . . . M 上の p-形式.

写像による微分形式の引き戻し

M 上の p-形式 ω の写像 $\varphi : \widetilde{M} \to M$ による引き戻し $\varphi^*\omega$.
. . . ω の定義で $q^\alpha = q^\alpha(\tilde{q})$ と置いて得られる $\widetilde{M}$ 上の p-形式.

$$\varphi^*\omega := \frac{1}{p!}\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(q(\tilde{q}))\frac{\partial q^{\alpha_1}(\tilde{q})}{\partial \widetilde{q^{\beta_1}}} \cdots \frac{\partial q^{\alpha_p}(\tilde{q})}{\partial \widetilde{q^{\beta_p}}}\mathrm{d}\widetilde{q^{\beta_1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\widetilde{q^{\beta_p}}.$$

引き戻し $\varphi^*\omega$ の定義は M, $\widetilde{M}$ の一般座標の取り方によらない（各自確認）.

補遺：Stokes の定理の証明

引き戻しの性質

1. $\displaystyle\int_C \omega = \int_{\varphi^{-1}(C)} \varphi^*\omega.$
2. 外微分と引き戻しは可換である：$\varphi^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\varphi^*\omega).$

積分領域 C はある「単純な」領域 C_0 を全単射 φ により写して得られるとする：

$$C = \varphi(C_0), \quad \partial C = \varphi(\partial C_0).$$

$$\Rightarrow \quad \int_C \mathrm{d}\omega = \int_{C_0} \varphi^*\varphi, \quad \int_{\partial C} \omega = \int_{\partial C_0} \varphi^*\omega.$$

C_0 上で Stokes の定理

$$\int_{C_0} \mathrm{d}\omega_0 = \int_{\partial C_0} \omega_0 \quad (\, \omega_0 := \varphi^*\omega \,)$$

が成り立つことを証明すればよい．

実際には，C_0 は「多面体」にとる（Step 2/3 参照）．

【引き戻しの性質 1 の証明】

$$C = \left\{ \, (q^1(u), \ldots, q^N(u)) \,\middle|\, u = (u^1, \ldots, u^p) \in C_0 \, \right\} \qquad (\, C_0 \subset \mathbb{R}^p \,)$$

とおく．すると，

$$\varphi^{-1}(C) = \left\{ \, (\widetilde{q}^{1}(u), \ldots, \widetilde{q}^{\widetilde{N}}(u)) \,\middle|\, u = (u^1, \ldots, u^p) \in C_0 \, \right\}$$

となる．したがって，次を得る．

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi^{-1}(C)} \varphi^* \omega \\
&= \frac{1}{p!} \int_{\varphi^{-1}(C)} \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(q(\widetilde{q})) \frac{\partial q^{\alpha_1}}{\partial \widetilde{q^{\beta_1}}} \cdots \frac{\partial q^{\alpha_p}}{\partial \widetilde{q^{\beta_p}}} \mathrm{d}\widetilde{q^{\beta_1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\widetilde{q^{\beta_p}} \\
&= \frac{1}{p!} \int \cdots \int_{C_0} \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(q(\widetilde{q}(u))) \underbrace{\frac{\partial q^{\alpha_1}}{\partial \widetilde{q^{\beta_1}}} \cdots \frac{\partial q^{\alpha_p}}{\partial \widetilde{q^{\beta_p}}} \frac{\partial(\widetilde{q^{\beta_1}}, \ldots, \widetilde{q^{\beta_p}})}{\partial(u^1, \ldots, u^p)}}_{(1)} \mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^p
\end{aligned}$$

行列式の計算より $(1) = \partial(q^{\alpha_1}, \ldots, q^{\alpha_p}) / \partial(u^1, \ldots, u^p)$ が示されるから，

$$上式 = \frac{1}{p!} \int \cdots \int_{C_0} \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(q(u)) \frac{\partial(q^{\alpha_1}, \ldots, q^{\alpha_p})}{\partial(u^1, \ldots, u^p)} \mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^p = \int_C \omega.$$

補遺：Stokes の定理の証明

【引き戻しの性質 2 の証明】

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\varphi^*\omega) &= \frac{1}{p!}\frac{\partial}{\partial\widetilde{q^{\gamma}}}\left[\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(q(\widetilde{(q)}))\frac{\partial q^{\alpha_1}}{\partial\widetilde{q^{\beta_1}}}\cdots\frac{\partial q^{\alpha_p}}{\partial\widetilde{q^{\beta_p}}}\right]\mathrm{d}\widetilde{q^{\gamma}}\wedge\mathrm{d}\widetilde{q^{\beta_1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\widetilde{q^{\beta_p}} \\
&= \frac{1}{p!}\frac{\partial}{\partial\widetilde{q^{\gamma}}}\left[\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(q(\widetilde{q}))\right]\frac{\partial q^{\alpha_1}}{\partial\widetilde{q^{\beta_1}}}\cdots\frac{\partial q^{\alpha_p}}{\partial\widetilde{q^{\beta_p}}} \\
&\quad\times\mathrm{d}\widetilde{q^{\gamma}}\wedge\mathrm{d}\widetilde{q^{\beta_1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\widetilde{q^{\beta_p}} \\
&\quad+\frac{1}{p!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(q(\widetilde{q}))\left[\underbrace{\frac{\partial^2 q^{\alpha_1}}{\partial\widetilde{q^{\gamma}}\partial\widetilde{q^{\beta_1}}}}_{(1)}\frac{\partial q^{\alpha_2}}{\partial\widetilde{q}^{\beta_2}}\cdots\frac{\partial q^{\alpha_p}}{\partial\widetilde{q}^{\beta_p}}+\cdots\right] \\
&\qquad\times\underbrace{\mathrm{d}\widetilde{q^{\gamma}}\wedge\mathrm{d}\widetilde{q^{\beta_1}}}_{(2)}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\widetilde{q^{\beta_p}}.
\end{aligned}
$$

第 2 項以降は，添字 γ, β_1 の入れ替えに関して (1) は対称，(2) は反対称であるから，消える．よって，

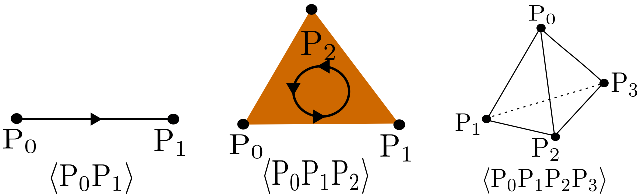
$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\varphi^*\omega) &= \frac{1}{p!}\left.\frac{\partial\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}}{\partial q^{\delta}}\right|_{q=q(\widetilde{q})}\frac{\partial q^{\delta}}{\partial\widetilde{q^{\gamma}}}\frac{\partial q^{\alpha_1}}{\partial\widetilde{q^{\beta_1}}}\cdots\frac{\partial q^{\alpha_p}}{\partial\widetilde{q^{\beta_p}}}\mathrm{d}\widetilde{q^{\gamma}}\wedge\mathrm{d}\widetilde{q^{\beta_1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\widetilde{q^{\beta_p}} \\
&= \varphi^*(\mathrm{d}\omega).
\end{aligned}
$$

(Step 2/3) 単体・鎖

以下，$\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots$ は Euclid 空間内の点とする．

p-単体：$(p+1)$ 個の点の並び $\sigma_p = \langle \mathrm{P}_0 \mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_p \rangle$.

- 0-単体＝点，1-単体＝線分，2-単体＝三角形，3-単体＝四面体．



- p-単体 σ_p 上の p-形式 ω の積分 $\displaystyle\int_{\sigma_p} \omega$ を考えることができる．

補遺：Stokes の定理の証明

- p-鎖：p-単体の形式的な整数係数線型結合 *.

$$n_1\sigma_p^{(1)} + n_2\sigma_p^{(2)} + \cdots + n_k\sigma_p^{(k)} \quad (\, n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}\,).$$

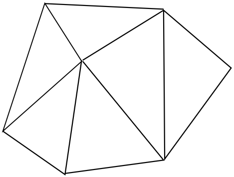
$*$ 本当は実数係数線型結合である.

- p-鎖 $n_1\sigma_p^{(1)} + \cdots + n_k\sigma_p^{(k)}$ 上の p-形式 ω の積分.

$$\int_{n_1\sigma_p^{(1)}+\cdots+n_k\sigma_p^{(k)}} \omega := n_1 \int_{\sigma_p^{(1)}} \omega + \cdots + n_k \int_{\sigma_p^{(k)}} \omega.$$

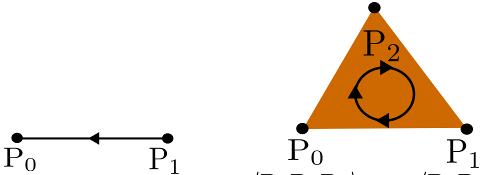
とくに，多面体 σ の単体分割 $\sigma = \sigma_p^{(1)} + \cdots + \sigma_p^{(k)}$ に対して，

$$\int_\sigma \omega = \int_{\sigma_p^{(1)}} \omega + \cdots + \int_{\sigma_p^{(k)}} \omega.$$



- 単体の 2 点を入れ替えると符号が反転する（と約束する）.

$$\langle \mathrm{P}_0 \ldots \mathrm{P}_j \ldots \mathrm{P}_i \ldots \mathrm{P}_p \rangle = -\langle \mathrm{P}_0 \ldots \mathrm{P}_i \ldots \mathrm{P}_j \ldots \mathrm{P}_p \rangle.$$



$$\langle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_0 \rangle = -\langle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 \rangle \qquad \langle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1 \rangle = -\langle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 \rangle$$

$$\int_{\langle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_0 \rangle} \omega_1 = -\int_{\langle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 \rangle} \omega_1 \quad (\,\omega_1 \;:\; \text{1-形式}\,),$$

$$\int_{\langle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1 \rangle} \omega_2 = -\int_{\langle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 \rangle} \omega_2 \quad (\,\omega_2 \;:\; \text{2-形式}\,), \qquad \text{etc.}$$

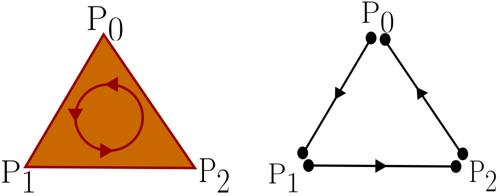
補遺：Stokes の定理の証明

p-単体の境界

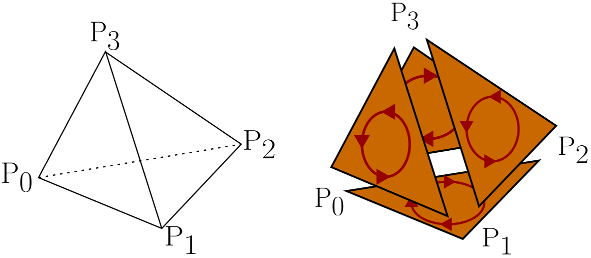
$$\begin{aligned}
&\partial\langle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\dots\mathrm{P}_p\rangle \\
:= &\sum_{i=0}^{p}\langle \mathrm{P}_0\dots\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_{i+1}\dots\mathrm{P}_p\rangle \\
= &\langle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\dots\mathrm{P}_p\rangle - \langle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_2\dots\mathrm{P}_p\rangle \\
&+ \langle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3\dots\mathrm{P}_p\rangle - \cdots + (-1)^p\langle \mathrm{P}_0\dots\mathrm{P}_{p-1}\rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial\langle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\rangle &= \langle \mathrm{P}_1\rangle - \langle \mathrm{P}_0\rangle, \\
\partial\langle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\rangle &= \langle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\rangle - \langle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_2\rangle + \langle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\rangle \\
&= \langle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\rangle + \langle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\rangle + \langle \mathrm{P}_2\mathrm{P}_0\rangle, \\
\partial\langle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\rangle &= \langle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\rangle - \langle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\rangle + \langle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3\rangle - \langle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\rangle
\end{aligned}$$

補遺：Stokes の定理の証明



$$\partial\langle P_0P_1P_2\rangle = \langle P_0P_1\rangle + \langle P_1P_2\rangle + \langle P_2P_0\rangle.$$



$$\begin{aligned}\partial\langle P_0P_1P_2P_3\rangle &= \langle P_1P_2P_3\rangle - \langle P_0P_2P_3\rangle + \langle P_0P_1P_3\rangle - \langle P_0P_1P_2\rangle \\ &= \langle P_1P_2P_3\rangle + \langle P_0P_3P_2\rangle + \langle P_0P_1P_3\rangle + \langle P_0P_2P_1\rangle.\end{aligned}$$

補遺：Stokes の定理の証明

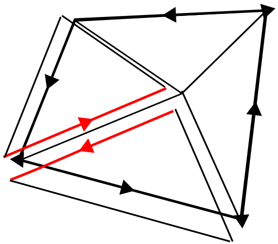
多面体 τ の単体（三角形）分割．

$$\tau = \sigma_p^{(1)} + \cdots + \sigma_p^{(k)}.$$

多面体 τ の境界 $\partial\tau$ =各単体（三角形）の境界の和．

$$\partial\tau = \partial\sigma_p^{(1)} + \cdots + \partial\sigma_p^{(k)}.$$

隣り合うふたつの三角形の境界において，共有する辺の和は打ち消し合ってゼロになる（同じ線分，反対向きの辺同士，打ち消し合う）．



補遺：Stokes の定理の証明

Stokes の定理 $\displaystyle\int_C \mathrm{d}\omega = \int_{\partial C} \omega$ の証明．

1. ここでは，積分領域 C はある p-鎖（多面体）τ の可微分全単射 φ による像である場合について，定理を証明することにする．

   微分形式の写像 φ による引き戻しを考える．

$$\int_C \mathrm{d}\omega = \int_\tau \varphi^*(\mathrm{d}\omega) = \int_\tau \mathrm{d}(\varphi^*\omega), \qquad \int_{\partial C} \omega = \int_{\partial\tau} \varphi^*\omega.$$

   Stokes の定理：$C = \tau$ とした場合を証明すればよい．

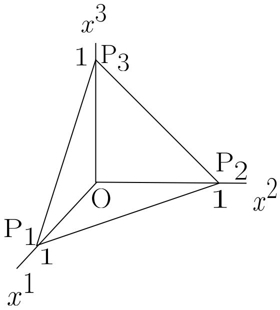
2. p-鎖 τ を単体（三角形）分割する：$\tau = \sigma_p^{(1)} + \cdots + \sigma_p^{(k)}$.

$$\int_\tau \mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{\sigma_p^{(i)}} \mathrm{d}\omega, \qquad \int_{\partial\tau} \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial\sigma_p^{(i)}} \omega.$$

   Stokes の定理：$C = \sigma_p^{(i)}$ とした場合を証明すればよい．

3. $\sigma_p^{(i)}$ としてとくに標準的 p-単体 $\overline{\sigma}_p$ をとる.

$$\overline{\sigma}_p := \{\, (x^1, \ldots, x^p) \in \mathbb{R}^p \mid x^1, \ldots, x^p \geq 0,\ x^1 + \cdots + x^p \leq 1 \,\}.$$



(Step 3/3) 標準的 p-単体 $\overline{\sigma}_p$ 上で Stokes の定理を証明

証明すべき等式．

$$\int_{\overline{\sigma}_p} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\overline{\sigma}_p} \omega,$$

$$\begin{aligned}\omega = {} & a_1(x)\mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^p \\ & + a_2(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^p \\ & + \cdots + a_p(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{p-1}.\end{aligned}$$

とくに最後の項

$$\omega_p := a_p(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{p-1}$$

について定理の等式

$$\int_{\overline{\sigma}_p} \mathrm{d}\omega_p = \int_{\partial\overline{\sigma}_p} \omega_p$$

が成り立つことを証明する．他の項

$$a_1(x)\mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^p, \ \ a_2(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^p$$

についても同様にして Stokes の定理の等式が証明できる．

補遺：Stokes の定理の証明

$\displaystyle\int_{\overline{\sigma}_p} \mathrm{d}\omega_p$ の計算．

まず，$\mathrm{d}\omega_p$ を計算する．

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega_p &= \left(\frac{\partial a_p(x)}{\partial x^1} \mathrm{d}x^1 + \cdots + \frac{\partial a_p(x)}{\partial x^p} \mathrm{d}x^p \right) \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{p-1} \\
&\quad \text{$\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^1 = 0$, etc. により} \\
&= \frac{\partial a_p(x)}{\partial x^p} \mathrm{d}x^p \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{p-1} \\
&\quad \text{くさび積 $\wedge$ の反可換性により} \\
&= (-1)^{p-1} \frac{\partial a_p(x)}{\partial x^p} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^p,
\end{aligned}$$

これから，微分形式の積分の計算公式に従って，

$$\int_{\overline{\sigma}_p} \mathrm{d}\omega_p = (-1)^{p-1} \int_{\overline{\sigma}_p} \frac{\partial a_p(x)}{\partial x^p} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^p$$

の具体的計算を行う．

補遺：Stokes の定理の証明

（復習）微分形式の計算公式

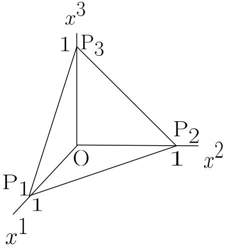
$$\int_C \omega = \frac{1}{p!}\int\cdots\int_{C_0} \omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(q)\frac{\partial(q^1,\ldots,q^p)}{\partial(u^1,\ldots,u^p)}\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^p,$$

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(q)\mathrm{d}q^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^p,$$

$$C = \left\{\, (q^1(u),\ldots,q^p(u)) \;\middle|\; u=(u^1,\ldots,u^p)\in C_0 \,\right\} \quad (\, C_0\subset\mathbb{R}^p\,).$$

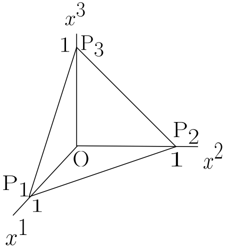
上の公式を用いて次の積分を計算する．

$$\int_{\langle \mathrm{OP}_1\ldots\mathrm{P}_p\rangle} \frac{\partial a_p(x)}{\partial x^p}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^p$$



積分領域 $\langle \mathrm{OP}_1\ldots\mathrm{P}_p\rangle$.

$$\int_{\langle \mathrm{OP}_1 \ldots \mathrm{P}_p \rangle} \frac{\partial a_p(x)}{\partial x^p} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^p$$



積分領域 $\langle \mathrm{OP}_1 \ldots \mathrm{P}_p \rangle$.

積分領域を次のようにパラメータ表示する．

$$x^1 = u^1,\ x^2 = u^2,\ \ldots, x^p = u^p,$$
$$(u^1, \ldots, u^p) \in \langle \mathrm{OP}_1 \ldots \mathrm{P}_p \rangle.$$

$\ast$ 要するに，デカルト座標 $x^1, \ldots, x^p$ 自体を積分パラメータに取る．

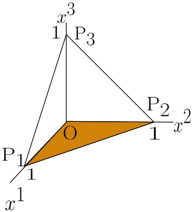
補遺：Stokes の定理の証明

$$\int_{\overline{\sigma}_p} \mathrm{d}\omega_p = (-1)^{p-1} \int_{\overline{\sigma}_p} \frac{\partial a_p(x)}{\partial x^p} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^p$$

$$= (-1)^{p-1} \int \cdots \int_{\langle \mathrm{OP}_1 \ldots \mathrm{P}_{p-1} \rangle} \frac{\partial a_p(x)}{\partial x^p} \underbrace{\frac{\partial(x^1, \ldots, x^p)}{\partial(u^1, \ldots, u^p)}}_{1} \mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^p$$

$u^p = x^p$ の積分を行って

$$= (-1)^{p-1} \int \cdots \int_{\langle \mathrm{OP}_1 \ldots \mathrm{P}_{p-1} \rangle} \Big[a_p(u^1, \ldots, u^{p-1}, 1 - u^1 - \cdots - u^{p-1}) - a_p(u^1, \ldots, u^{p-1}, 0) \Big] \mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^{p-1}.$$



$(u^1, \ldots, u^{p-1}) = (x^1, \ldots, x^{p-1})$ の積分領域 $\langle \mathrm{OP}_1 \ldots \mathrm{P}_{p-1} \rangle$ ($p = 3$).

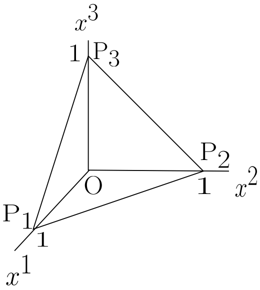
$\displaystyle\int_{\partial\overline{\sigma}_p} \omega_p$ の計算.

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\overline{\sigma}_p} \omega_p &= \int_{\partial\langle \mathrm{OP}_1\ldots\mathrm{P}_p\rangle} \omega_p \\
&= \int_{\langle \mathrm{P}_1\ldots\mathrm{P}_p\rangle - \langle \mathrm{OP}_2\ldots\mathrm{P}_p\rangle + \langle \mathrm{OP}_1\mathrm{P}_3\ldots\mathrm{P}_p\rangle - \cdots + (-1)^p\langle \mathrm{OP}_1\ldots\mathrm{P}_{p-1}\rangle} \omega_p \\
&= \int_{\langle \mathrm{P}_1\ldots\mathrm{P}_p\rangle} \omega_p - \int_{\langle \mathrm{OP}_2\ldots\mathrm{P}_p\rangle} \omega_p + \int_{\langle \mathrm{OP}_1\mathrm{P}_3\ldots\mathrm{P}_p\rangle} \omega_p \\
&\quad - \cdots + (-1)^p \int_{\langle \mathrm{OP}_1\ldots\mathrm{P}_{p-1}\rangle} \omega_p.
\end{aligned}
$$

最右辺各項の $(p-1)$-形式 ω_p の積分を計算する.

最初の項の計算．

$$\int_{\langle \mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_p \rangle} \omega_p$$
$$= \int_{\langle \mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_p \rangle} a_p(x) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{p-1}.$$



積分領域 $\langle \mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_p \rangle$ のパラメータ表示．

$$x^1 = u^1, \ldots, x^{p-1} = u^{p-1}, \quad x^p = 1 - u^1 - \cdots - u^{p-1},$$
$$(u^1, \ldots, u^{p-1}) \in \langle \mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_{p-1} \mathrm{O} \rangle.$$

$$\int_{\langle \mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_p \rangle} a_p(x) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{p-1}$$

$$= \int \cdots \int_{\langle \mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_{p-1} \mathrm{O} \rangle} a_p(u^1, \ldots, u^{p-1}, 1 - u^1 - \cdots - u^{p-1})$$

$$\times \underbrace{\frac{\partial(x^1, \ldots, x^{p-1})}{\partial(u^1, \ldots, u^{p-1})}}_{1} \mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^{p-1}$$

単体を構成する 2 点を入れ替えると単体の符号が変わる.

$$= (-1)^{p-1} \int \cdots \int_{\langle \mathrm{O} \mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_{p-1} \rangle} a_p(u^1, \ldots, u^{p-1},$$

$$1 - u^1 - \cdots - u^{p-1}) \mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^{p-1}.$$

補遺：Stokes の定理の証明

最後の項の計算．最初の項と同じ積分変数のパラメータ表示を用いる．

$$
\begin{aligned}
&(-1)^p \int_{\langle \mathrm{OP}_1 \ldots \mathrm{P}_{p-1} \rangle} \omega_p \\
= &-(-1)^{p-1} \int_{\langle \mathrm{OP}_1 \ldots \mathrm{P}_{p-1} \rangle} a_p(x^1, \ldots, x^{p-1}, x^p) \\
&\qquad\qquad \times \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{p-1}
\end{aligned}
$$

$x^1 = u^1, \ldots, x^{p-1} = u^{p-1}, x^p = 0$　とおく．

$$
\begin{aligned}
= &-(-1)^{p-1} \int_{\langle \mathrm{OP}_1 \ldots \mathrm{P}_{p-1} \rangle} a_p(u^1, \ldots, u^{p-1}, 0) \\
&\qquad\qquad \times \underbrace{\frac{\partial(x^1, \ldots, x^{p-1})}{\partial(u^1, \ldots, u^{p-1})}}_{1} \mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^{p-1} \\
= &-(-1)^{p-1} \int_{\langle \mathrm{OP}_1 \ldots \mathrm{P}_{p-1} \rangle} a_p(u^1, \ldots, u^{p-1}, 0) \mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^{p-1}.
\end{aligned}
$$

補遺：Stokes の定理の証明

他の「辺」上の積分は 0 となる．例えば，2 番めの項は次のように計算される．

$$\int_{\langle \mathrm{OP}_2 \ldots \mathrm{P}_p \rangle} \omega_p$$

$$= \int_{\langle \mathrm{OP}_2 \ldots \mathrm{P}_p \rangle} a_p(x^1, \ldots, x^p) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{p-1}$$

$x^1 = 0,\ x^2 = u^2, \ldots, x^p = u^p$ とおく．

$$= \int_{\langle \mathrm{OP}_2 \ldots \mathrm{P}_p \rangle} a_p(0, u^2, \ldots, u^p) \times \underbrace{\frac{\partial(x^1 = 0, x^2, \ldots, x^{p-1})}{\partial(u^1, u^2, \ldots, u^{p-1})}}_{0} \mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^{p-1} = 0.$$

以上より次が示され，Stokes の定理の等式が示された．

$$\text{両辺} = (-1)^{p-1} \int \cdots \int_{\langle \mathrm{OP}_1 \ldots \mathrm{P}_{p-1} \rangle} \Big[a_p(u^1, \ldots, u^{p-1}, 1 - u^1 - \cdots - u^{p-1}) - a_p(u^1, \ldots, u^{p-1}, 0) \Big] \mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^{p-1}.$$

（証明了）