ルベーグ積分を知らないコンプレックスから脱却する動画

緒方秀教

電気通信大学大学院　情報理工学研究科　情報・ネットワーク工学専攻

April 1, 2024

はじめに

ルベーグ (Lebesgue) 積分（測度論）

- 応用数学にもよく現れる．
  - 関数解析：L^p 空間（$p \geq 1$）

$$L^p(\mathbb{R}) := \left\{ f(x) \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

    ここに現れる積分はルベーグ積分である．
  - 確率論：測度論を使って定式化される．
- ところが，理学部数学科以外では授業をする所が少ない．
- 数学科以外出身の応用数学者

  . . . ルベーグ積分を知らないコンプレックス．

はじめに

ルベーグ (Lebesgue) 積分（測度論）

- 応用数学にもよく現れる．
  - 関数解析：L^p 空間（$p \geq 1$）

$$L^p(\mathbb{R}) := \left\{ f(x) \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

    ここに現れる積分はルベーグ積分である．
  - 確率論：測度論を使って定式化される．
- ところが，理学部数学科以外では授業をする所が少ない．
- 数学科以外出身の応用数学者

  . . . ルベーグ積分を知らないコンプレックス．

この動画の目的

ルベーグ積分を知らないコンプレックスを解消する．

- ルベーグ積分論（測度論）の概略を説明．
- 主要 2 定理（極限定理，リース・フィッシャーの定理）の紹介・一部証明．

Contents

Contents

ルベーグ積分とどう付き合うか？

ルベーグ積分を知らないコンプレックスの解消法

簡単な教科書でさっさと独学する．

- 勉強しないから「知らない」コンプレックスを抱えたままになる．
  さっさと勉強してしまって「知れば」よい．
- 薄くて簡単な教科書で十分（分厚い本は心が折れる）．
- 私が勉強した教科書．

  竹之内脩「ルベーグ積分」（培風館，1980 年）．
  いまは絶版になっているらしい（2024 年 4 月現在）．

  以降，この本をネタ本にして説明をする．

ルベーグ積分とどう付き合うか？

ルベーグ積分を独習する際の指針

ルベーグ積分論が必要なのは，次の 2 定理があるからである．

- 極限定理 . . . 積分と極限の順序交換

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

  が（リーマン積分に比べて）かなり緩やかな条件で可能である．
- リース・フィッシャー (Riesz-Fischer) の定理．

  . . . L^p 空間の完備性．

このふたつを学ぶことを目標にして勉強する．

本動画では次のように話を進める．

- はじめに，ルベーグ積分論の概略を与える．
- 極限定理，リース・フィッシャーの定理の紹介．後者の証明．

この動画の PC スライドを概要欄の URL に載せておきます．

Contents

ルベーグ積分論の概略 (1)：測度空間

まず，ルベーグ積分論の舞台である測度空間を定義する．

可測空間 $(S, \mathscr{M})$．

- S：全体集合（空間）．ルベーグ積分論の舞台．
- σ 集合族 $\mathscr{M}$：S の部分集合族で次を満たすもの．
  1. $S, \emptyset \in \mathscr{M}$.
  2. $M \in \mathscr{M} \Rightarrow M^c \in \mathscr{M}$.
  3. 可算無限個の $M_1, M_2, \ldots \in \mathscr{M}$ ならば，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathscr{M}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathscr{M}.$$

- 可測集合：$\mathscr{M}$ に含まれる集合．

可測集合に対しその測度を与える（長さ・面積・体積を一般化したもの）．

ルベーグ積分論の概略 (1)：測度空間

測度空間 $(S, \mathscr{M}, \mu)$

可測空間 $(S, \mathscr{M})$ に対し次を満たす測度と呼ばれる写像

$$\mu : \mathscr{M} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

を与えたもの.

1. $0 \leq \mu(M) \leq \infty$ ($\forall M \in \mathscr{M}$).
2. $\mu(\emptyset) = 0$.
3. 完全加法性：可算個の $M_1, M_2, \ldots \in \mathscr{M}$ で $M_m \cap M_n = \emptyset$ ($m \neq n$) なるものに対して,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n).$$

測度：ユークリッド空間における長さ・面積・体積の一般化.

測度論：抽象的な空間に長さ・面積・体積の概念を与える.

ルベーグ積分論の概略 (1)：測度空間

測度空間の例

確率論：ルベーグ積分論の言葉で定式化する．

- 確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$：測度空間のひとつ．
- Ω：標本空間．
- 事象：可測集合 $F \in \mathscr{F}$.
- 事象 F が起こる確率：F の測度 $P(F)$.
- 完全加法性：事象 $F_1, F_2, \ldots \in \mathscr{F}$ がどの 2 つも同時に起こり得ない ($F_m \cap F_n = \emptyset$ $(m \neq n)$) ならば，

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n).$$

  事象 $F_1, F_2, \ldots$ のどれかが起こる確率は，各事象の確率 $P(F_1), P(F_2), \ldots$ の和．
- $P(\Omega) = 1$ . . . あらゆる事象のどれかが起こる確率=1.

ルベーグ積分論の概略 (1)：測度空間

速度空間の例

数直線 $\mathbb{R}$（ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$）を基とする測度空間 $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, m)$.

- ボレル集合体 $\mathscr{B}$：$\mathbb{R}$ の開集合全体 $\mathscr{O}$ から生成される可測空間.

  $B_1, B_2, \ldots \in \mathscr{B}$ ならば $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{B}$ としたいから,

  - $\mathscr{O}$ に $\mathbb{R}$ の閉集合（=開集合の補集合）を $\mathscr{O}$ に足す.
  - 開集合 $O_1, O_2, \ldots$ の共通部分 $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ を足す.

    (和集合 $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$ は開集合 $\in \mathscr{O}$)
  - 閉集合 $C_1, C_2, \ldots$ の和集合 $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ を足す

    ($\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ は閉集合 $\in \mathscr{B}$).
  - $\ldots$

  とやっていって，ボレル集合体 $\mathscr{B}$ をつくる.
- ボレル測度（ルベーグ測度）m：

  区間 (a, b) の測度 $= |b - a|$ から出発して，構成する.

Contents

ルベーグ積分論の概略 (2)：積分

いよいよ，ルベーグ積分を定義する．

可測関数：関数 $f : S \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ で次をみたすもの．
任意の定数 α に対し

$$\{ f \geq \alpha \} := \{ s \in S \mid f(s) \geq \alpha \} \in \mathscr{M}.$$

- f が可測関数なら，次も言える．

$$\{ f > \alpha \}, \{ f \leq \alpha \}, \{ f < \alpha \}, \\ \{ f = \alpha \}, \{ \alpha \leq f \leq \beta \}, \ldots \in \mathscr{M}.$$

f の値の範囲を定める様々な集合 $\in \mathscr{M}$.

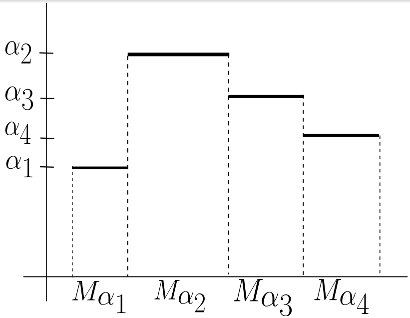
ルベーグ積分論の概略 (2)：積分

可測関数のシンボリック表示

可測関数 $f(s)$ は関数値の分布を可測集合で表せるもの．

$$f(s) = \sum_{\alpha} \alpha \cdot \chi_{M_\alpha}(s), \qquad M_\alpha = \{ f = \alpha \} \in \mathscr{M},$$

$$\chi_{M_\alpha}(s) := \begin{cases} 1 & (\ s \in M_\alpha\ ) \\ 0 & (\ s \notin M_\alpha\ ) \end{cases} \qquad \text{集合 } M_\alpha \text{ の特性関数.}$$



ルベーグ積分論の概略 (2)：積分

可測関数のシンボリック表示

可測関数 $f(s)$ は関数値の分布を可測集合で表せるもの．

$$f(s) = \sum_{\alpha} \alpha \cdot \chi_{M_\alpha}(s), \qquad M_\alpha = \{\, f = \alpha \,\} \in \mathscr{M},$$

$$\chi_{M_\alpha}(s) := \begin{cases} 1 & (\ s \in M_\alpha\ ) \\ 0 & (\ s \notin M_\alpha\ ) \end{cases}$$ 集合 M_α の特性関数.

f, g が可測関数なら，次の関数も可測関数である．

$$af + bg\ (\ a, b : \mathrm{const.}\ ),\ \ fg,\ \ g/f,$$

$$f \vee g : (f \vee g)(s) := \max\{f(s), g(s)\},$$

$$f \wedge g : (f \wedge g)(s) := \min\{f(s), g(s)\}, \qquad \cdots$$

f_n ($n = 1, 2, \ldots$) が可測関数なら，次の関数も可測関数である．

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n,\ \ \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n,\ \ \lim_{n\to\infty} f_n$$ (もし存在するなら).

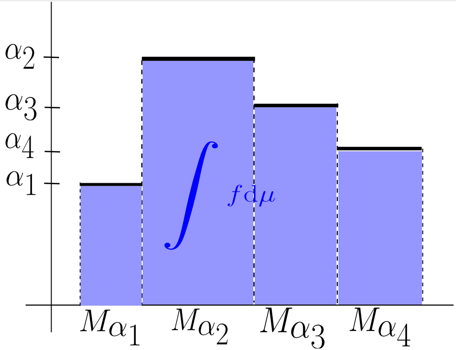
ルベーグ積分論の概略 (2)：積分

可測関数の積分

$$\text{可測関数} \quad f(s) = \sum_{\alpha} \alpha \cdot \chi_{M_\alpha}(s),$$

$$\Downarrow$$

$$\text{積分} \quad \int f \mathrm{d}\mu := \sum_{\alpha} \alpha \cdot \mu(M_\alpha).$$



ルベーグ積分論の概略 (2)：積分

もっとちゃんとした積分の定義.

1°：$f(s) \geq 0$ ($\forall s \in S$) の場合.

$$\left.\begin{array}{l} \mathscr{O}(\subset \mathscr{M})\text{：互いに交わらない可測集合から成る有限部分集合族,} \\ \qquad \mathscr{O} = \{ M_1, M_2, \ldots, M_q \} \subset \mathscr{M}, \\ \qquad\quad M_j \cap M_k = \emptyset \quad (j \neq k). \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\underline{\sum}_{\mathscr{O}}(f) := \sum_{k=1}^{q} \inf_{s \in M_k} f(s) \cdot \mu(M_k).$$

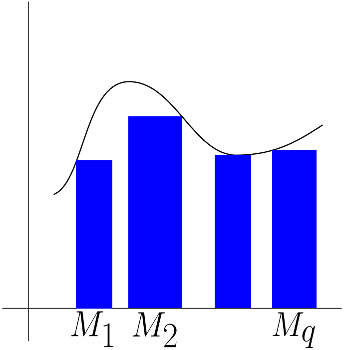
$$\Downarrow$$

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int f(s) \mathrm{d}\mu(s) := \sup_{\mathscr{O}} \underline{\sum}_{\mathscr{O}}(f)$$

(1) をみたす部分集合族 $\mathscr{O}$ 全体について上限を取る.

ルベーグ積分論の概略 (2)：積分

$$\int f \mathrm{d}\mu := \sup_{\mathscr{O}} \underline{\sum}_{\mathscr{O}}(f)$$

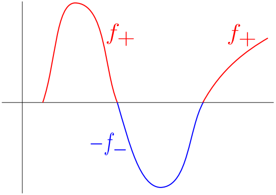


青色部分の面積の和が $\underline{\sum}_{\mathscr{O}}(f)$ ($\mathscr{O} = \{ M_1, \ldots, M_q \}$).

2°：一般の可測関数 $f(x)$ の場合.

- $f(s)$ を正の部分と負の部分に分ける.

$$f = f_+ - f_-,$$
$$f_+(s) := \begin{cases} f(s) & (\, f(s) \geq 0 \,) \\ 0 & (\, f(s) < 0 \,), \end{cases}$$
$$f_-(s) := \begin{cases} 0 & (\, f(s) \geq 0 \,) \\ |f(s)| & (\, f(s) < 0 \,). \end{cases}$$



- $$\int f \mathrm{d}\mu := \int f_+ \mathrm{d}\mu - \int f_- \mathrm{d}\mu.$$

3° 可測集合 $M(\in \mathscr{M})$ 上の積分.

$$\int_M f \mathrm{d}\mu := \int f\chi_M \mathrm{d}\mu, \quad \chi_M(s) := \begin{cases} 1 & (\, s \in M \,) \\ 0 & (\, s \notin M \,). \end{cases}$$

ルベーグ積分論の概略 (2)：積分

従来の積分の性質はそのまま成立する．

$$\int (af + bg)\mathrm{d}\mu = a\int f\mathrm{d}\mu + b\int f\mathrm{d}\mu \quad (\ a, b : \text{const.}\ ),$$

$$\left|\int f\mathrm{d}\mu\right| \leq \int |f|\mathrm{d}\mu,$$

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int f\mathrm{d}\mu \leq \int g\mathrm{d}\mu.$$

$\int \to \int_M$ ($M \in \mathscr{M}$) としてもよい．

ルベーグ積分論の概略 (2)：積分

可測関数の積分.

$$f(s) = \sum_{\alpha} \alpha \cdot \chi_{M_\alpha}(s) \;\Rightarrow\; \int f \mathrm{d}\mu = \sum_{\alpha} \alpha \mu(M_\alpha).$$

測度＝0 の集合上の関数値は積分に反映されない.

ルベーグ積分論の概略 (2)：積分

可測関数の積分．

$$f(s) = \sum_\alpha \alpha \cdot \chi_{M_\alpha}(s) \;\Rightarrow\; \int f \mathrm{d}\mu = \sum_\alpha \alpha\mu(M_\alpha).$$

測度＝0 の集合上の関数値は積分に反映されない．

例：$S = [0, 1]$（実軸上の区間），μ：ルベーグ測度（長さ）．

ディリクレ関数

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (\, x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \,) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

$\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ は可算集合，可算集合の測度＝0 である．

$\because$ 可算集合 $M = \{\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \,\}$ に対し，$\epsilon > 0$ を任意として

$$\mu(\{\alpha_1\}) \le 2^{-1}\epsilon,\; \mu(\{\alpha_2\}) \le 2^{-2}\epsilon, \ldots.$$

測度 μ の完全加法性より，

$$\mu(M) = \mu(\{\alpha_1\}) + \mu(\{\alpha_2\}) + \cdots \le (2^{-1} + 2^{-2} + \cdots)\epsilon = \epsilon.$$

$\epsilon > 0$ は任意であるから，$\mu(M) = 0$.

ルベーグ積分論の概略 (2)：積分

可測関数の積分．

$$f(s) = \sum_{\alpha} \alpha \cdot \chi_{M_\alpha}(s) \ \Rightarrow\ \int f \mathrm{d}\mu = \sum_{\alpha} \alpha \mu(M_\alpha).$$

測度=0 の集合上の関数値は積分に反映されない．

例：$S = [0, 1]$（実軸上の区間），μ：ルベーグ測度（長さ）．

ディリクレ関数

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (\ x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]\ ) \\ 0 & \text{（それ以外）}. \end{cases}$$

$\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ は可算集合，可算集合の測度=0 であるから，

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

ルベーグ積分論の概略 (2)：積分

可測関数の積分．

$$f(s) = \sum_{\alpha} \alpha \cdot \chi_{M_\alpha}(s) \ \Rightarrow \ \int f \mathrm{d}\mu = \sum_{\alpha} \alpha \mu(M_\alpha).$$

測度＝0 の集合上の関数値は積分に反映されない．

ほとんどすべての (a.a.)，ほとんどいたるところで (a.e.)

- a.a.s に対して（ほとんどすべての s に対して，for almost all s）P が成り立つ．
- a.e.（ほとんどいたるところで，almost everywhere）P が成り立つ．

これらは次を意味するものとする．

$$\mu\left(\{\ \mathrm{P}\ \text{が成り立たないような}\ s\ \}\right) = 0.$$

測度論では測度 0 の集合上の出来事は無視する．

Contents

極限定理

これから紹介する 2 定理はルベーグ積分論のいちばん主要な定理である．

- 極限定理
- リース・フィッシャーの定理

ルベーグ積分論はこの 2 定理のためにあると言っても過言ではない．

極限定理

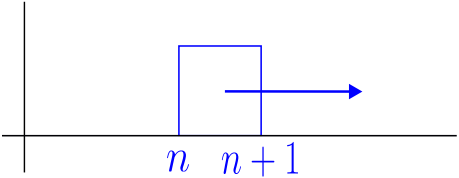
積分と極限操作の順序交換

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n \mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu.$$

いつも可能とは限らない.

例

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & (\, n \leq x \leq n+1 \,) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \qquad (\, n = 0, 1, 2, \ldots \,).$$



積分と極限操作の順序交換

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n \mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu.$$

いつも可能とは限らない．

例

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & (\ n \leq x \leq n+1\ ) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \qquad (\ n = 0, 1, 2, \ldots\ ).$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{より} \quad \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0,$$

$$\text{一方} \quad \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x = 1 \quad (\ n = 0, 1, 2, \ldots\ ).$$

$$\therefore \quad \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \neq \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

極限定理

- リーマン積分：「一様収束」が言えれば積分と極限操作が可能である．
- ルベーグ積分：もっと緩やかな条件のもとで，積分と極限操作の交換可能性が言える．
  - 単調収束定理
  - 優収束定理

極限定理

単調収束定理 (1)

$$f_n \ (\ n = 1, 2, \ldots\ ) : \text{可測関数}, \qquad 0 \leq f_n \uparrow f.$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu.$$

極限定理

単調収束定理 (1)

$$f_n\ (\ n = 1, 2, \ldots\ ) : \text{可測関数}, \quad 0 \leq f_n \uparrow f.$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu.$$

$f_n \geq 0$ の代わりに「f_1 は積分可能」を仮定してよい
（$f_n \to f_n - f_1$ として上定理を適用し，$\int f_1 \mathrm{d}\mu$ を加える）.

極限定理

単調収束定理（1）

$$f_n \ (\ n = 1, 2, \ldots\ ) : \text{可測関数}, \qquad 0 \leq f_n \uparrow f.$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu.$$

単調収束定理（2）

$$f_n \ (\ n = 1, 2, \ldots\ ) : \text{可測関数},$$

$$f_n \uparrow f, \qquad \int f_1 \mathrm{d}\mu \ \text{は有限値}.$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu.$$

極限定理

優収束定理

f_n ($n = 1, 2, \ldots$)：可測関数，$f := \lim_{n\to\infty} f_n$.

ある可測関数 g が存在して

$$|f_n| \le g, \quad \int g \mathrm{d}\mu < \infty.$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu.$$

これらの極限定理の証明は「補遺」に載せます．

動画では証明を述べないので，概要欄 URL に載せてある当 PC スライドを御覧ください．

Contents

リース・フィッシャーの定理

リース・フィッシャーの定理

$$L^p = L^p(S) := \left\{ f : S \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty \right\} \quad (\, p \geq 1 \,)$$

$$\left(\|f\|_p := \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \quad L^p(S) \text{ のノルム} \right)$$

は完備である．すなわち，$L^p(S)$ の関数列 $\{f_n\}$ について，

$$\{f_n\} \text{ はコーシー列：} \; \|f_m - f_n\|_p \to 0 \quad (\, m, n \to \infty \,).$$

$$\Downarrow$$

$$\{f_n\} \text{ は収束列：} \; f_n \to \exists f \text{ in } L^p.$$

リース・フィッシャーの定理

リース・フィッシャーの定理

$$L^p = L^p(S) := \left\{ f : S \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty \right\} \quad (\, p \geq 1\,)$$

は完備である．すなわち，$L^p(S)$ の関数列 $\{f_n\}$ について，

$$\{f_n\} \text{ はコーシー列： } \|f_m - f_n\|_p \to 0 \quad (\, m, n \to \infty\,).$$
$$\Downarrow$$
$$\{f_n\} \text{ は収束列： } f_n \to \exists f \text{ in } L^p.$$

完備は解析学で重要な概念である．

$\mathbb{R}$ は完備である．

数列・点列・関数列の収束を証明するのに，

- 具体的な収束先を知っている必要がない．
- 差が 0 に行くことを示せばよい．

【リース・フィッシャーの定理の証明】$\{f_n\}$ を L^p のコーシー列とする．
$k = 1, 2, \ldots$ に対し正の整数 $n(k)$ ($n(1) < n(2) < \cdots$) が取れて

$$\|f_m - f_n\|_p \leq 2^{-k} \quad (\,\forall m, n \geq n(k)\,).$$

次の方針で定理を証明する．

1. 部分列 $\{f_{n(k)}\}_k$ はある関数 $f \in L^p$ に収束する．
2. もとの関数列 $\{f_n\}$ も f に収束する．

1° 関数 $\sigma_k(s)$ ($k = 1, 2, \ldots$) を次で導入する．

$$\sigma_k(s) := \sum_{j=1}^{k} |f_{n(j)}(s) - f_{n(j+1)}(s)|.$$

各 s に対し $\{\sigma_k(s)\}_k$ は単調増加する実数列であるから，
$+\infty$ を含めて極限 $\sigma(s) := \lim_{k\to\infty} \sigma_k(s)$ が存在する．

一方，ミンコフスキーの不等式 ($\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$) より

$$\|\sigma_k\|_p \leq \sum_{j=1}^{k} \|f_{n(j)} - f_{n(j+1)}\|_p \leq \sum_{j=1}^{k} 2^{-j} \leq 1,$$

【リース・フィッシャーの定理の証明（続）】

$$\int {\sigma_k}^p \mathrm{d}\mu \leq 1.$$

$0 \leq \sigma_k \uparrow \sigma$ であるから，単調収束定理より

$$\int \sigma^p \mathrm{d}\mu = \lim_{k \to \infty} \int {\sigma_k}^p \mathrm{d}\mu \leq 1.$$

したがって，a.a.s に対し $\sigma(s) = \lim_{k \to \infty} \sigma_k(s)$ は有限値である．
そして，$\sigma \in L^p$ である．

関数 $\tau_k(s)$ ($k = 1, 2, \ldots$) を次で定義する．

$$\tau_k(s) := \sum_{j=1}^{k} (f_{n(j)}(s) - f_{n(j+1)}(s)) = f_{n(1)}(s) - f_{n(k+1)}(s).$$

【リース・フィッシャーの定理の証明（続）】

$$\tau_k = \sum_{j=1}^{k} (f_{n(j)} - f_{n(j+1)}), \quad \sigma_k = \sum_{j=1}^{k} |f_{n(j)} - f_{n(j+1)}|$$

であり，$\{\sigma_k(s)\}_k$ は a.a.s に対して有限値に収束するから，
$\{\tau_k(s)\}_k$ は a.a.s に対し有限値に絶対収束 $\Rightarrow$ 収束する．
$\tau(s) := \lim_{k\to\infty} \tau_k(s)$ とおく．

$$\int |\tau|^p \mathrm{d}\mu \leq \int \sigma^p \mathrm{d}\mu \leq 1 < \infty \text{ より } \tau \in L^p.$$

$$\tau_k = f_{n(1)} - f_{n(k+1)} \to \tau \quad (\, k \to \infty \,),$$
$$f_{n(k)} \to f_{n(1)} - \tau =: f \in L^p \quad (\, k \to \infty \,).$$

ゆえに，$\{f_{n(k)}\}_k$ は L^p の収束列である．

リース・フィッシャーの定理

【リース・フィッシャーの定理の証明（続）】

2° $\{f_n\}$ 自体が f に収束することを示す．

$\{f_n\}$ は L^p のコーシー列であるから，任意に $\epsilon > 0$ を取ればある n_ϵ が存在し，

$$\|f_m - f_n\|_p \leq \epsilon \quad (\,\forall m, n \geq n_\epsilon\,).$$

$n(k) \geq n_\epsilon$ となるよう k を取れば，

$$\|f_m - f_{n(k)}\|_p \leq \epsilon \quad (\,\forall m \geq n_\epsilon\,).$$

$$\begin{aligned}\|f_m - f\|_p &\leq \|f_m - f_{n(k)}\|_p + \|f_{n(k)} - f\|_p \\ &\leq \epsilon + \|f_{n(k)} - f\|_p \quad (\,\forall m \geq n_\epsilon\,).\end{aligned}$$

$k \to \infty$ として，$\|f_m - f\|_p \leq \epsilon\ (\,\forall m \geq n_\epsilon\,)$.

ゆえに，$\{f_n\}$ は L^p の収束列である：$f_n \to f \in L^p$.

（証明了）

Contents

まとめ

動画のまとめ．

1. ルベーグ積分論は簡単な教科書で勉強してしまおう．
2. ルベーグ積分の概略．
    - 測度空間，積分の定義．
    - 極限定理：積分と極限操作が可換である条件．
    - リース・フィッシャーの定理：L^p 空間の完備性（証明付き）．

本動画ではルベーグ積分論の初歩的部分を駆け足で述べましたが，もっと本格的に勉強するなら，本動画を基にして適切な教科書にあたっていただけたら幸いです．

まとめ

動画のまとめ．

1. ルベーグ積分論は簡単な教科書で勉強してしまおう．
2. ルベーグ積分の概略．
   - 測度空間，積分の定義．
   - 極限定理：積分と極限操作が可換である条件．
   - リース・フィッシャーの定理：L^p 空間の完備性（証明付き）．

本動画ではルベーグ積分論の初歩的部分を駆け足で述べましたが，もっと本格的に勉強するなら，本動画を基にして適切な教科書にあたっていただけたら幸いです．

Thank you very much!

Contents

補遺：単調収束定理 (1) の証明

$0 \leq f_n \uparrow f$ より $0 \leq \int f_n \mathrm{d}\mu \leq \int f \mathrm{d}\mu$.

よって，$\left\{ \int f_n \mathrm{d}\mu \right\}$ は上に有界な単調増加列なので収束し，

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \leq \int f \mathrm{d}\mu.$$

逆の不等号を示す．

$$\epsilon > 0 \text{ 任意},\quad \mathscr{O} = \{ M(1), \ldots, M(q) \} \subset \mathscr{M} \text{ 有限個の可測集合族}.$$

$n = 1, 2, \ldots, k = 1, \ldots, q$ に対し集合 $M(n, k)$ を次で定義する．

$$M(n, k) := M(k) \cap \{ f_n \geq \underline{f}(M(k)) - \epsilon \}$$

$$\left(M \in \mathscr{M} \text{ に対し } \underline{f}(M) := \inf \{ f(s) \mid s \in M \} \right).$$

このとき，次が成り立つ．

$$\int_{M(k)} f_n \mathrm{d}\mu \geq \int_{M(n,k)} f_n \mathrm{d}\mu \geq (\underline{f}(M(k)) - \epsilon)\mu(M(n, k)).$$

補遺：単調収束定理 (1) の証明

$M(n,k) \uparrow_n M(k)$ より $\mu(M(n,k)) \uparrow_n \mu(M(k))$ であり（μ の完全加法性から言える），$n \to \infty$ とすることにより

$$\int_{M(k)} f_n \mathrm{d}\mu \geq (\underline{f}(M(k)) - \epsilon)\mu(M(k)),$$

$\epsilon > 0$ は任意だから，

$$\int_{M(k)} f_n \mathrm{d}\mu \geq \underline{f}(M(k))\mu(M(k)).$$

$k = 1, \ldots, q$ について和を取れば，

$$\int f_n \mathrm{d}\mu \geq \sum_{k=1}^{q} \int_{M(k)} f_n \mathrm{d}\mu \geq \sum_{k=1}^{q} \underline{f}(M(k))\mu(M(k)) = \underline{\sum}_{\mathscr{O}}(f),$$

$$\therefore \quad \int f_n \mathrm{d}\mu \geq \sup_{\mathscr{O}} \underline{\sum}_{\mathscr{O}}(f) = \int f \mathrm{d}\mu,$$

$n \to \infty$ として所望の不等式を得る．

（単調収束定理の証明了）

補遺：優収束定理の証明

まず，次の補題を準備する．

ファトゥー（Fatou）の補題

可測関数列 $f_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \ldots$) に対し，

$$\int \varliminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

【証明】$0 \leq \inf_{k\geq n} f_k \uparrow_n f := \varliminf_{n\to\infty} f_n$ であるから，単調収束定理より

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int \inf_{k\geq n} f_k \mathrm{d}\mu.$$

一方，

$$\inf_{\kappa\geq n} f_\kappa \leq f_k \ (k \geq n) \quad \text{より} \quad \int \inf_{\kappa\geq n} f_\kappa \mathrm{d}\mu \leq \int f_k \mathrm{d}\mu \ (k \geq n),$$

$$\int \inf_{\kappa\geq n} f_\kappa \mathrm{d}\mu \leq \inf_{k\geq n} \int f_k \mathrm{d}\mu.$$

補遺：優収束定理の証明

$n \to \infty$ として，

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int \inf_{\kappa \geq n} f_\kappa \mathrm{d}\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

（Fatou の補題の証明了）

補遺：優収束定理の証明

【優収束定理の証明】$0 \leq \pm f_n + g$ であるから，ファトゥーの補題より

$$\int \varliminf_{n\to\infty} (f_n + g)\mathrm{d}\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int (f_n + g)\mathrm{d}\mu,$$
$$\int \varliminf_{n\to\infty} (-f_n + g)\mathrm{d}\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int (-f_n + g)\mathrm{d}\mu.$$

2 つの不等式の両辺から $\int g\mathrm{d}\mu$ を引いて

$$\int \varliminf_{n\to\infty} f_n\mathrm{d}\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} f_n\mathrm{d}\mu \leq \varlimsup_{n\to\infty} f_n\mathrm{d}\mu \leq \int \varlimsup_{n\to\infty} f_n\mathrm{d}\mu.$$

いま，

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n = \varlimsup_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n =: f$$

と仮定しているから，上の不等式の最左辺と最右辺は一致し，はさみ打ちにより

$$\int f\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\mathrm{d}\mu = \varliminf_{n\to\infty} \int f_n\mathrm{d}\mu = \varlimsup_{n\to\infty} \int f_n\mathrm{d}\mu.$$

（証明了）